Annu. Rep. Nishi-Harima Astron. Obs. 2, 69 - 73 (1992)

ノーモン型日時計の理論と設計

北村静一[1, 2]
1）英知大学
2)兵庫県立西はりま天文台

Theory and Plan of Sundial of Gnohmon Type

Seiichi Kitamura[1,2]
1) Eichi University, Faculty of Literature, Nakooji, Amagasaki, 661
2) Nishi-Harima Astronomical Observatory, Sayo-cho, Hyogo, 679-53

Abstract

We show the sundial of gnohmon type which is very simple and useful. By appropriate mathematical transformation, we can get a chart of loci of shadow of Gnohmon which are hyperbola or ellipse, and loci of equi-time which are straight lines. We can use this chart and gnohmon as a sundial. We show some process of transformation and program of drawing of loci.

Keyword: Gnohmon-Sundial

1. はじめに

ノーモンとは地上に垂直に立てた棒のことであって、これほど簡単な天文観測機械はない。しかし、むかしからこの棒の長さを測って、種々の天文測量がなされてきたことは、中国・エジプト・中近東などの歴史を見ればよくわかる。さらに日本の小学校でも、この方法で太陽の高さや方位の変化を測って天文教育のスタートをさせたことは良く知られている。しかし、これを直接日時計の形にしたものは案外少ない。また、日時計としての認識すら少ないように思われる。関口(1980)は、柱型日時計と名付けて説明しているが、曲線群の作図については省略されているので、描きにくく感じられる。最近はパーソナルコンピュータが普及し、この作図は簡単になったので、ここにそれを紹介したい。

2. 日影曲線の理論

地球の北極に垂直に棒を立てると、夏至の前後では棒の先の影は、Fig.1のように北極の地上では円を描く。この円は、Fig.1, 2を見れば分かるように、高度 h（実は太陽赤緯δに等しい）の傾きを持った直線ＡＢを母線とする円錐の側面と地平面との交線になる。一般にFig.3のような座標系を使って円錐の曲線を式に表すと

$$(x^2+y^2)/a^2-z^2/c^2=0, \qquad (1)$$

で表される。

$$c/a = \tan\delta, \qquad (2)$$

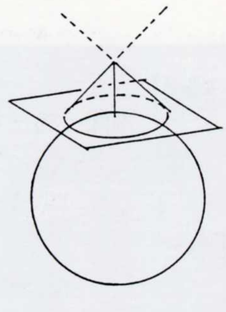


Fig. 1

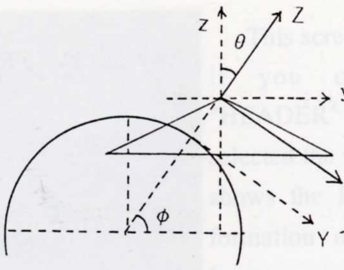


Fig. 4

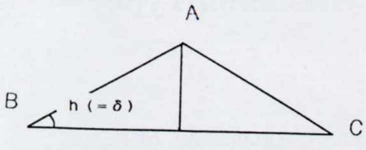


Fig. 2

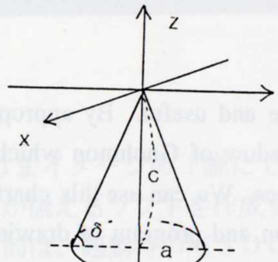


Fig. 3

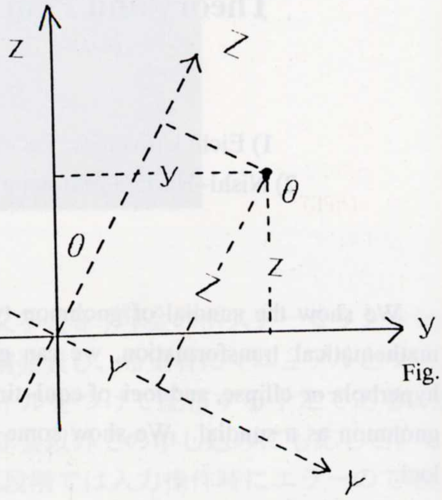


Fig. 5

であるから、

$$(x^2+y^2)-z^2/\tan^2\delta=0, \qquad (3)$$

北極ではなく、北緯ϕ度の地点で棒を立てても、棒の先端を日光の直線が描くのは同様な円錐曲線であるが、座標軸をFig.4のようにθだけ時計回りに回転すると、

$$z=Y\sin\theta+Z\cos\theta, \qquad (4)$$

$$y=Y\cos\theta-Z\sin\theta, \qquad (5)$$

$$x=X, \qquad (6)$$

という変換が行われる（Fig.5）。(4), (5) を (3) に代入すると、

$$X^2+(Y\cos\theta-Z\sin\theta)^2$$

$$=(Y\sin\theta+Z\cos\theta)^2/\tan^2\delta.$$

さらに、X, Y 平面を棒の長さ L だけ下げるために、Z=Z'−Lとする。また、Fig. 4 より、θとϕの関係は、向きも考慮すると$\theta=\phi-90°$ となる。そこで、

$$[X^2+\{Y\cos(\phi-90°)$$

$$-(Z-L)\sin(\phi-90°)\}^2]\tan^2\delta$$

$$=\{(Z-L)\cos(\phi-90°)+Y\sin(\phi-90°)\}^2.$$

最後に Z=0 とおいて、この円錐面と地面との交線を求めると、ノーモンの先の影が描く曲線となる。

$$[X^2+\{Y\cos(\phi-90°)-L\sin(\phi-90°)\}^2]\tan^2\delta$$

$$=\{-L\cos(\phi-90°)-Y\sin(\phi-90°)\}^2,$$

$$\{X^2+(Y\sin\phi-L\cos\phi)^2\}\tan^2\delta$$

$$=(L\sin\phi+Y\cos\phi)^2,$$

$$(X^2+Y^2\sin^2\phi+L^2\cos^2\phi-2YL\sin\phi\cos\phi)\sin^2\delta$$

$$=(L^2\sin^2\phi+Y^2\cos^2\phi+2YL\sin\phi\cos\phi)\cos^2\phi,$$

$$Y^2(\cos^2\phi\cos^2\delta-\sin^2\phi\sin^2\delta)+2YL\sin\phi\cos\phi-$$

$$X^2\sin^2\delta=L^2(\cos^2\phi\sin^2\delta-\sin^2\phi\cos^2\delta),$$

$$S=\cos^2\phi\cos^2\delta-\sin^2\phi\sin^2\delta,$$

とすると、

$$Y^2+(2YL\sin\phi\cos\phi/S)+(L\sin\phi\cos\phi/S)^2$$

$$-X^2\sin^2\delta/S$$

$$=L^2(\cos^2\phi\sin^2\delta-\sin^2\phi\cos^2\delta)/S$$

$$+(L\sin\phi\cos\phi/S)^2,$$

$$(Y+L\sin\phi\cos\phi/S)^2-X^2\sin^2\delta/S$$

$=(L\sin\delta\cos\delta/S)^2$.

最後に $P=(L\sin\delta\cos\delta)^2$, $Q=(L\cos2\delta)^2$, $R=L\sin\phi\cos\phi$ とおくと

$$\frac{(Y+R/S)^2}{P/S^2} - \frac{X^2}{Q/S} = 1$$

$S>0$ のときはFig. 6の形の双曲線、$S<0$ のときは楕円になる。この形の式は、北村(1986)が示した通りである。この曲線の作図は、以前はたいへん困難であったが、現在はパーソナルコンピュータを用いて簡単なプログラムで作図することができるので、以下にこれを紹介する。

3. 日影曲線を描くプログラム

BASIC によるプログラムは以下に示すとおりである。

```
  5 CONSOLE ,,0,1
 10 SCREEN 3:'ﾋﾄﾞｹｲ
 20  INPUT "ff=";FF:F=FF*3.1415/180 :INPUT "L=";L:CLS 3
 30 PRINT "IDO=";FF
 40 PRINT "L  =";L
 67 FOR DD=25 TO 0   STEP -5
 70  D=DD*3.1415/180
 80  P=(L*SIN(D)*COS(D))^2:Q=(L*COS(D))^2
 85  R=L*SIN(F)*COS(F)
 90  S=((COS(D))^2*(COS(F))^2-(SIN(D))^2*(SIN(F))^2)
402 FOR X2=1   TO 640 STEP 1
403   W=(1+(X2-320)^2*S/Q)
405   IF W=<0 GOTO 440
410   IF FF=90 AND DD=0 GOTO 440
412   IF S=0 GOTO 440
415  Y2=260+((1+(X2-320)^2*S/Q)*P/(S^2))^(.5 )-R/S :PSET (X2,Y2),7
417  Y3=260-((1+(X2-320)^2*S/Q)*P/(S^2))^(.5 )-R/S :PSET (X2,Y3),7
440  NEXT X2
450 NEXT DD
560  CIRCLE (320,260),3 ,7
565 IF FF=0 GOTO 750
570 FOR TT=1 TO 11
580 T=TT*15*3.1415/180
590 FOR X4=320 TO 640 STEP 1
600 Y4=260-(COS(T)/(SIN(T)*SIN(F)))*(X4-320)+L*COS(F)/SIN(F)
610 PSET (X4,Y4),7
620 NEXT X4
630 NEXT TT
670 FOR TT=-1 TO -11 STEP -1
680 T=TT*15*3.1415/180
690 FOR X5=320 TO 0   STEP -1
700 Y5=260-(COS(T)/(SIN(T)*SIN(F)))*(X5-320)+L*COS(F)/SIN(F)
```

```
710 PSET (X5,Y5),7
720 NEXT X5
730 NEXT TT
740 LINE (320,0)-(320,400),7 :GOTO 790
750 FOR TT=0    TO 5
760  T=TT*15*3.1415/180
770    LINE(L*TAN(T)+320,0)-(L*TAN(T)+320,400),7
775    LINE(-L*TAN(T)+320,0)-(-L*TAN(T)+320,400),7
780 NEXT TT
790 END
```

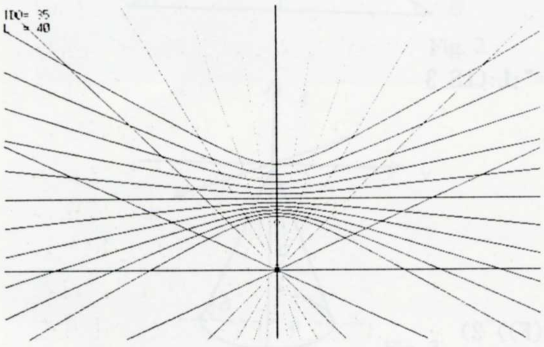


Fig. 6

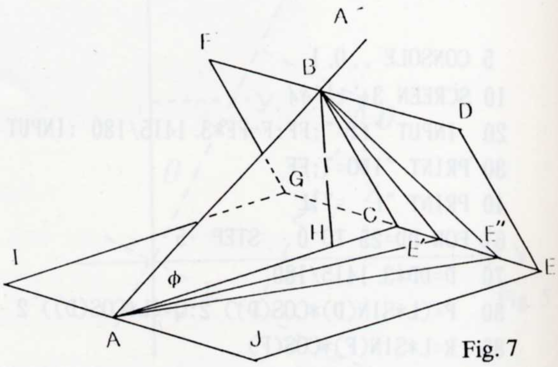


Fig. 7

4．日影曲線の実例

緯度 ϕ=35° のとき、棒の長さ L=40 の日影曲線群を示すとFig.6のようになる。この図で、曲線群は下から赤緯 25°（ 23.5° の代わり），20°,15°,...,–20°,–25° の場合の図である。小さい丸は、棒を立てた位置を示し、その真下の黒丸から放射状に出る線は、時刻を表す線（時刻線）である。これは、平面型日時計の斜線の影に相当し、その方程式は、

$$Y = (\cos T \cdot \mathrm{cosec}\,\phi)X - L\cot\phi$$

で表されるが、これも北村(1986)が示した通りである。

5．ノーモン日時計としての使い方

時刻線を導くには Fig.7のように平面型日時計の展開図を用いて簡単に計算できる。すなわち、平面日時計ＡＢＨを水平名板ＩＪＥＧに取り付けたものを考える。ＡＢに垂直な直線ＢＣを考え、ＡＢＣ面に垂直な平面ＤＥＧＦを作るとこれが赤道面に相当する。ＡＢをさらに延長したＢＡ’を考えると、これはちょうど北極上で地面に立てたノーモンに相当し、その影はＢＣから１時間で 15° 回転し、t 時間では 15×t° 回転して、それぞれＢＥ’、ＢＥ”へ来る。その時の斜線ＡＢの影は、ＡＥ’、ＡＥ”になる。この直線群が、上に述べた時刻線である。

赤道面ＦＤＥＧを水平面まで倒したFig.8において、ＢＣ＝L/cos ϕ であるから、

$$CE'' = BC\tan T = L\tan T/\cos\phi, \qquad (9)$$

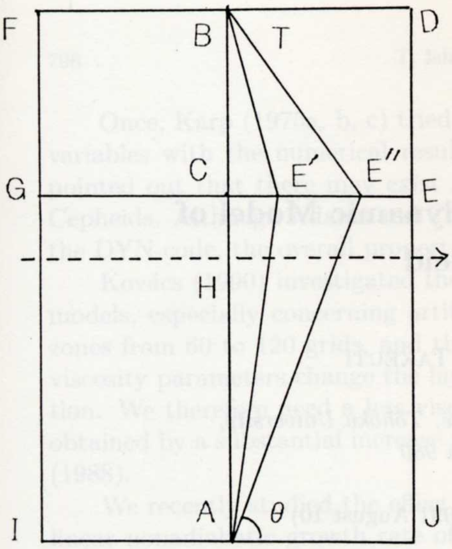


Fig. 8

一方、AC = L/sin ϕ cos ϕ 従って、

$$CE'' / AC = \cot\theta$$

より、

$$CE'' = L/\sin\phi\tan\theta, \quad (10)$$

(9), (10) を等しいとおくと、

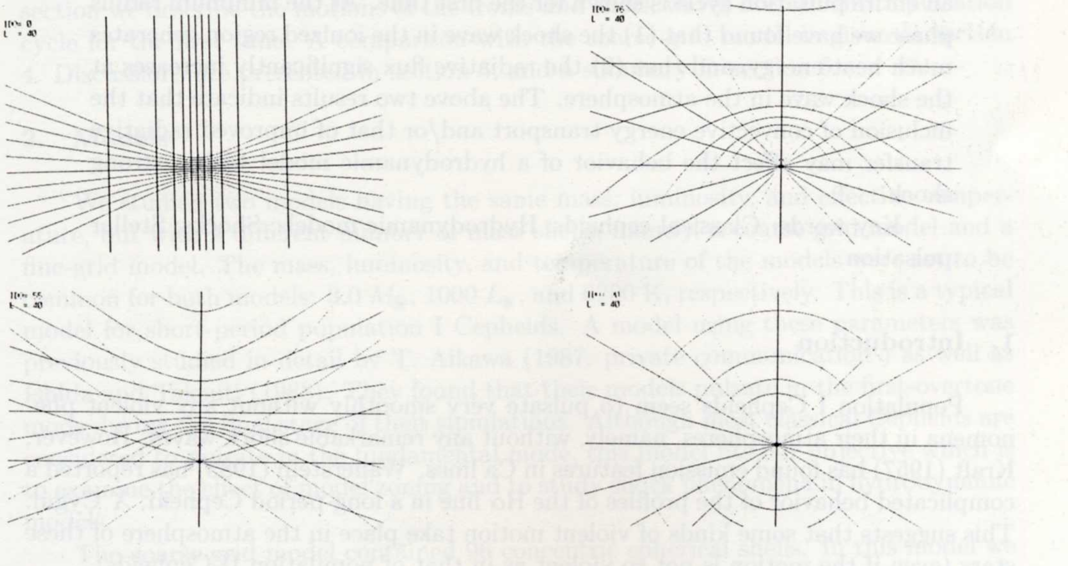
$$\tan\theta = \cot T \cdot \mathrm{cosec}\,\phi$$

Hはノーモンの根元であり、これを通る水平線をX軸、ACをY軸とすれば時刻線AE"を表す式は

$$Y = \cot T \cdot \mathrm{cosec}\,\phi\, X - L\cot\phi,$$

となる。

これをノーモン日時計として使うには、長さ L の棒を用意して、Fig. 6の小さい丸の上に立て東西南北線を正しく合わせてやればよい。ただし均時差と明石との経度差を補正してやらなければならない。そのためには、時刻線の代わりにアナレンマ図形を描けばよいがここでは省略する。その土地の緯度に合った日影曲線図を大きく拡大して、棒の長さも同率で拡大してやると広場などに適した大きい日時計が出来る。パリのコンコルド広場に立つオベリスクをノーモンと見れば、その周囲の広場に大きい日影曲線を描き、花壇などで色どりをすれば、すばらしい広場になるであろう。あるいは小さいものを用意して持ち歩けば、簡単な携帯用の日時計になるし、これを逆に使うと磁石を使わない南北を決める道具にもなる。最後に緯度 0°, 55°, 76°, 90° の場合の曲線をプリントアウトしたものを示す。



《参考文献》

北村静一, 1986, 月刊「うちゅう」(大阪市立電気科学館星の友の会), 2, No. 10
関口直甫, 1980, 日時計百科, 天文ライブラリー9, 恒星社厚生閣, p128