Annu. Rep. Nishi-Harima Astron. Obs. 2, 35 - 40 (1992)

動径脈動星モード間の結合係数

石田　俊人

兵庫県立西はりま天文台

Coupling Coefficients of Radial Stellar Pulsation

Toshihito Ishida

Nishi-Harima Astronimical Observatory, Ohnadesan, Sayo-cho, Hyogo 679-53

Abstract

Recent progress on the theory on coupling coefficients of radial stellar pulsation is briefly reviewd. In this review, two approaches to the mode coupling in pulsating stars are discussed, namely amplitude equations and oscillator model equations. Moreover, some problems in the present research of the coupling coefficient are pointed out.

Key words: Coupling Coefficients; Nonlinear Oscillation; Stellar Pulsation

1. はじめに

HR 図上のある領域では、恒星表面直下の水素・ヘリウムの電離層が、恒星全体の脈動を引き起こす。このような星は、脈動変光星と呼ばれている。恒星の進化が進んで主系列を離れると、恒星はその質量に応じた回数だけ脈動を引き起こす領域を通ることになる。脈動変光星は、その変動の特徴によって、いくつかの種類に分類されている。これらの種類のうち、白色矮星の脈動星、たて座δ型星、こと座ＲＲ型星、短周期の古典的セファイドなどでは、しばしば、いくつかの周期が重なった変動が見られる。このような変動は多重周期脈動と呼ばれている。上記の多重周期の分布は、絶対光度が比較的暗い領域に片寄っている。絶対光度が暗ければ、脈動周期は短くなるので、これは、一般的に周期が短い脈動星の方が、多重周期脈動を起こしやすくなっていることを示している。

これらの多重周期脈動のうち、古典的セファイドの中で２つの周期で脈動しているものは、二重周期セファイドと呼ばれている。二重周期脈動は、多重周期脈動の中では最も単純なものである。また、古典的セファイドは典型的な脈動変光星として多くの研究が行われている。そこで、以下二重周期セファイドについて、やや詳しく見ていくことにする。

Balona (1985) の図１には、二重周期セファイドの近くの色等級図が示されている。これを見ると、二重周期セファイドは、古典的セファイドの分布中のある限られた領域のみにある。しかし、その領域内の星がすべて二重周期となるわけではない。また、二重周期セファイドが存在する領域の周囲には、通常の単一周期のセファイドが分布している。二重周期セファイドは、おおむね理論的に基本振動モードと第一倍振動モードの両方が脈動不安定になる領域に分布している。しかし、両方のモードに対して脈動不安定な領域の星でも、単一周期のものもある。むしろ、多くの場合は単一周期になっていて、ある限られた条件のもとで、二重周期が実現するように見える。

以上をまとめると、周期が短い脈動星で多重周期脈動が起こりやすいこと、複数のモードに対して脈動不安定であっても多くの場合は単一周期脈動が実現すること、ある限られた条件のもとで多重周期脈動が実現することが観測

的にわかっている。なぜこのような現象が起こるのかについては、理論的に解明されなければならない。複数のモードが脈動不安定であるとき、それらのうちのどのモードが実際に現れるかについては、線形理論の範囲内では知ることはできない。特定のモードが選択されるためには、なんらかの非線形的なメカニズムが必要である。現実の脈動星でほとんどの場合に単一周期になっていることは、非線形メカニズムが実際に働いていることを示している。また、二重周期脈動も、この非線形メカニズムの働きが弱くなることによって、実現しているのであり、全体を非線形現象として理解する必要がある。このような現象は、モード選択 (modal selection) 周期同期 (synchronization) など、いくつかの名称で呼ばれている。こういった脈動変光星における非線形現象については、さまざまな面から研究が行われている。(最新の研究状況については、Takeuti and Buchler 1992 を見よ。)

理論的に多重周期脈動における非線形現象を調べる方法には、以下の二つがある。一つは流体力学的模型による数値計算で調べるものである。しかし、これまでに観測と適合した二重周期脈動の模型は得られていないので、この方法は今のところ有効な研究方法ではない。もう一つは、二つのモードのふるまいを表現するモデル式を解析的に研究することである。こうしたモデル式に現れる複数のモードの間の相互作用の強さを表現する係数が、脈動モード間の結合係数である。このようなモデルとしては、Takeuti and Aikawa (1981) 他による振動子模型を用いたものと、Buchler and Goupil (1984) 他による振幅方程式を用いるものの二つがある。

この論文では、このような動径脈動星モード間の結合係数に関するこれまでの研究をいくつか紹介する。2章と3章では、まず上記の二つのモデルについて述べ、モード結合係数を導入する。4章では、モード結合係数とモード選択の関係についてまとめ、5章ではモード結合係数の数値的評価について述べる。6章では、全体の考察とまとめを示す。

2. 振動子模型

Takeuti and Aikawa (1981) は、以下のようなラグランジェ形式での非線形非断熱動径脈動方程式を考察した。

$$\dddot{r} = -\frac{2r\dot{r}}{\rho_0 a^2}\frac{\partial P}{\partial a} - \frac{r^2}{\rho_0 a^2}\frac{\partial}{\partial a}\{\gamma P\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \rho\theta(\epsilon - \frac{\partial H}{\partial m})\} + g_0, \quad (1)$$

ここで、r は平衡状態において半径 a の位置にあった質量要素の半径で a と t の関数である。添字 0 は、平衡状態での物理量を表している。H は、半径 r の球面を通過する全輻射流束、ϵ は熱核反応による単位質量あたりのエネルギー生成率、θ はある種の断熱指数である。その他の記号は通常の意味を表している。

彼らは (1) 式の解が断熱脈動固有モードで展開できると仮定して、各モードの時間変動を示す式を導いた。

$$\ddot{q}_s + \sigma_s^2 q_s = \sum_m \sum_n \sigma_s^2 (1 - \frac{1}{2}\delta_{mn}) C(s;m,n) q_m q_n + \sum_n \sigma_s^2 K(s;n) q_n, \quad (2)$$

ここで、$C(s;m,n)$ は固有モード間の結合係数である。$K(s;n)$ は非断熱性の効果を表現している。彼らはさらに、非断熱性の効果を、

$$\sigma_s^2 K(s;n) q_n = \mu_s (1 - \alpha_s^2 q_s^2) \dot{q}_s,$$

のように van der Pol 型の項でモデル化した。このモデル化は、(2) では他のモードにも依存していた項をモード s のみに依存していると仮定したという意味も含んでいる。

3. 振幅方程式

Buchler and Goupil (1984) は、以下のようなラグランジェ形式での差分方程式を考察

した。

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{y},\mathbf{s}), \quad (3a)$$
$$\frac{d}{dt}\mathbf{s} = \mathbf{h}(\mathbf{y},\mathbf{s}), \quad (3b)$$

ここで、$\mathbf{y}, \mathbf{s}$ などは、N 次元のベクトルである。彼らは、Castor(1971) などの線形非断熱模型との関係を考慮しており、N は模型を構成する層の数に対応する。脈動星の場合、$\mathbf{y}$ は半径、$\mathbf{s}$ はエントロピーである。(3) 式は、

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{z}> = \mathbf{A}|\mathbf{z}> + \mathbf{N}_{\mathrm{NL}},$$

と書き直すことができる。行列 $\mathbf{A}$ には、$\mathbf{g}(\mathbf{y},\mathbf{s})$ $\mathbf{h}(\mathbf{y},\mathbf{s})$ の線形部分が含まれている。また、線形部分には

$$\mathbf{A}|\mathbf{e}_\alpha> = \sigma_\alpha|\mathbf{e}_\alpha>,$$
$$<\mathbf{f}_\alpha|\mathbf{A} = \sigma_\alpha<\mathbf{f}_\alpha|,$$

のような固有関数が存在する。ここで、関心のあるモードについて、

$$|\mathrm{Re}\sigma_\alpha/\mathrm{Im}\sigma_\alpha| \ll 0,$$

と仮定すると。

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_u + \mathbf{A}_p,$$

と、微小部分 $\mathbf{A}_p$ を分離することができる。多重時間法 (multi-time method) を導入し、$|\mathbf{z}>$ を漸近展開すると、最低次の方程式として、

$$D_0|\mathbf{z}_0> = A_u,$$

が得られる。以後、意味のある振幅方程式が出るまで、高次の方程式の解を求めて両立条件 (compatibility condition) を適用していく。

最終的に、彼らのモデルでは、単一モードの場合の振幅方程式は、

$$\frac{da}{dt} = \kappa_\alpha a + Q_\alpha a|a|^2,$$

となる。a は、まだ複素数であるので、$a = Aexp(i\theta)$ とすると

$$\frac{dA}{dt} = \kappa_\alpha A + \mathrm{Re}Q_\alpha A^3,$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{Im}Q_\alpha A^2.$$

係数 Q_α は、非線形部分の展開と、固有関数により求めることができる。

4. モード選択

4-1. 振動子方程式

二つのモードが非共鳴的に結合している場合の振動子方程式は以下のようになる。

$$\ddot{q_0} + \sigma_0\{1 - \frac{1}{2}C(0;0,0)q_0 - C(0;0,1)q_1\}q_0$$
$$- \mu_0(1-\alpha_0^2 q_0^2)\dot{q_0} = \frac{1}{2}\sigma_0^2 C(0;1,1)q_1^2, \quad (4a)$$
$$\ddot{q_1} + \sigma_1\{1 - \frac{1}{2}C(1;1,1)q_1 - C(1;1,0)q_0\}q_1$$
$$- \mu_1(1-\alpha_1^2 q_1^2)\dot{q_1} = \frac{1}{2}\sigma_1^2 C(1;0,0)q_0^2, \quad (4b)$$
$$(4c)$$

Takeuti (1985) は、(4) 式の解析解を検討して、片方のモードの振幅が特定の値を越えると他のモードの振動を抑制 (suppress) することを見いだした。以下、この振幅を抑制振幅と呼ぶ。Takeuti (1985) は、さらにこの抑制振幅が

$$A_0^* = S(0,1)(2/\alpha_1)^{1/2},$$
$$A_1^* = S(1,0)(2/\alpha_0)^{1/2},$$

と表現できることを示した。ここで、A_0^* はモード0がモード1を抑制するのに必要な振幅であり、A_1^* はその逆である。抑制効率 $S(i,j)$ は、モード結合係数 $C(s;m,n)$ などから求めることができる。

Ishida (1990) と Ishida and Takeuti (1991) は、上記の結果と Simon, Cox, and Hodson (1980) の振幅－振幅図を用いたモード選択の記述を組み合わせて、二重周期脈動が実現する

ための条件 について議論した。条件は

$$\frac{A_0^*}{A_0^l} > 1,$$
$$\frac{A_1^*}{A_1^l} > 1,$$

となる。ここで、A_0^l A_1^l は、モード0モード1の極限振幅である。さらに、Ishida and Takeuti (1991) は、数値計算によってこの条件がモード選択のようすをよく表現していることを示した。

4-2. 振幅方程式

Buchler and Kovács (1986) は、以下のような非共鳴的2モード結合の場合の振幅方程式について考察した。

$$\frac{dA}{dt} = \kappa_0 A + Q_0 A^3 + T_0 AB^2, \quad (5a)$$
$$\frac{dB}{dt} = \kappa_1 B + Q_1 B^3 + T_1 BA^2. \quad (5b)$$

(5)式には、A B とも振幅が0の場合、A のみ有限振幅を持つ場合、B のみ有限振幅を持つ場合、A B ともに有限振幅を持つ場合の4つの解が存在する。A のみ有限振幅であるときも、B のみ有限振幅であるときも、他のモードが成長すれば、A B ともに有限振幅を持つ解のみが安定となる。すなわち、条件

$$\frac{T_0}{Q_1} < \frac{Q_0}{T_1}, \quad (6)$$

が成立すれば、二つのモードの振幅 A B がともに正の値を持ち、安定である解が存在する。この条件(6)は、どちらのモードも他のモードから影響を受けることが少なければ、有限の振幅を持つようになることを意味している。

このほか、Dziembowski and Kovács (1984) は、(5)と同じ方程式について少し異なった形で整理している。また、3つのモード間の共鳴的結合がある場合も考察している。さらにいくつかの関連する研究も行われている。

5. モード結合係数

前章で示したように、どちらのモデルにおいてもモード選択のようすは、モード結合係数によって決まっている。すなわち、現実的な脈動星模型から必要なモード結合係数を求めることができなければ、実際の観測とモデルのふるまいを結び付けて考察することができない。

Takeuti and Aikawa (1981) には古典的セファイドにおける共鳴的結合の係数を評価した結果が示されている。また、Takeuti (1985) は、一つの古典的セファイド模型に対する非共鳴的結合係数を評価した。Takeuti (1985) の値は、非共鳴的2モード結合の振動子方程式の数値計算を行う場合にしばしば用いられている。(Seya, Tanaka, and Takeuti 1990, Ishida and Takeuti 1991 など)

Takeuti, Yamakawa, and Ishida (1992) は、非断熱性を取り入れるとこれらの係数がこれまでのものと大きく異なる可能性を指摘した。彼らは、圧力を

$$\left(\frac{P}{P_0}\right) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma exp\left(\frac{\delta s}{C_v}\right), \quad (7)$$

の形で表現できると仮定して、非断熱性を取り入れ、モード結合係数の表現式を導いた。この場合、モード結合係数は一般的には複素数となる。さらに、彼らは、いくつかの古典的セファイド模型での非共鳴的結合の係数を実際に求めた。その結果は、周期が長くなるほど、結合係数が大きくなる傾向を示している。結合係数が大きければ、非線形性が強く働らき、多重周期脈動は起こりにくいと考えられる。このことから、彼らの結果は、実際の二重周期セファイドが周期が短い領域で観測されていることに対応していると考えられる。

Zalewski (1992) は、Takeuti, et al. (1992) による対流の効果が入った線形非断熱模型でのモード結合係数を数値的に評価した。その結果、対流の効果により、結合係数はかなり小さくなることがわかった。

Ishida, et al. (1992) は、単一モードの非

断熱的振動子方程式の解を検討し、３次の結合係数を導入しなければ、極限振幅解が得られないことを指摘した。彼らはさらに、Takeuti, et al. (1992) の展開を拡張して３次の結合係数の表現式を導き、断熱近似の場合の数値的評価も行っている。

Klapp, Goupil, and Buchler (1985) は、古典的セファイド模型における共鳴的２モード結合の振幅方程式の係数を評価し、その結果から予測されるふるまいと、流体力学的模型による数値計算の結果がよく対応していることを示している。

6. 考察と結論

Takeuti, et al. (1992) の非断熱性に関する仮定 (7) について少し検討しよう。彼らは、結合係数を評価するときには、Castor (1971) の線形非断熱模型で得られた固有関数を用いている。ところが、Castor (1971) の模型では、

$$T_I \frac{dS_I}{dt} = \frac{L_I - L_{I+1}}{DM1_I},$$

を用いているので、一般には彼らの仮定を得られる固有関数とは一致しないと考えられる。このため、Castor(1971) 模型で得られた固有関数を用いて評価したモード結合係数についてはその精度に疑問がある。彼らの定式化によると、線形非断熱周期は

$$\begin{aligned}\sigma^2 \;\; = \;\; & -\int_0^M \frac{r_0}{\rho_0}\{-4\xi P_0' + [P_0(\frac{\gamma(r_0^3\xi)'}{r_0^2} \\ & - \eta]')\xi^* dm / \int_0^M r_0^2 \xi\xi^* dm, \qquad (8)\end{aligned}$$

と表現できるので、Castor (1971) 模型から得られる線形周期と、Castor(1971) 模型の固有関数を用いて (8) 式を評価して得られる周期とを比較すれば、モード結合係数の精度の目安になる可能性がある。ただし、周期に対しては一般に模型の細部による影響が小さいので、周期がかなり一致しても、必ずしもモード結合係数の精度が保証されるわけではない。

非断熱性を取り入れた場合の振動子方程式の解の性質については、これまでのところ十分には調べられていない。Ishida, et al. (1992) が調べたのは、単一モードの場合のみであった。このため、解析的にはさらにいろいろな場合の階について整理・検討する必要がある。また、数値的に調べるためには、３次の結合係数が必要であることが示されている。しかし、対流の効果を取り入れた現実的な場合の値は、今のところ求められていないので、早急に計算する必要がある。

また、断熱近似での振動子模型の数値計算では、カオス的変動や位相同期 (phase-locking) 現象が見つかっている。このような現象が、どのような状況で起こるのかは、まだ、十分には研究されていない。

通常の脈動方程式を Buchler and Goupil (1984) の定式化に従って展開していくと、２次の結合係数を求めるためには，$(\partial^2\kappa/\partial ln\rho^2)$。などの、微係数を求めることが必要となる。振動子模型の結合係数の展開でもエントロピーに関する式を通常の方程式に戻すと、やはり同様なことが起こる。さらに高次の結合係数を求めようとすると、さらに高階の微係数が必要となる。このような係数は、数値微分を用いて求めるしかないが、数値微分は、高階になるに従って、急速にその精度が悪くなるので、こういった展開では結合係数を実際に求めるのは非常に困難であることがわかる。しかし、非断熱性について Takeuti, et al. (1992) と同様の仮定をすれば、より容易に数値的評価を行うことができるかもしれない。

振動子方程式に非断熱性が取り入れられたことにより、振動子方程式と振幅方程式は対応がつきやすくなっている。これら２つの方程式の比較は、これまでのところほとんど行われていない。それぞれの方程式に、どのような物理過程が取り入れられており、また省略されているのかを明白にしておくことは、２つのアプローチを適切に使い分けるために必要なこと

と考えられる。

また、これまでのところ、モード結合係数の数値的評価は、古典的セファイド模型に対してのみ行われている。二重周期脈動は、こと座ＲＲ型星でも観測されているので、このような脈動星の模型について結合係数を評価してみる必要がある。

この論文では、モード結合係数に関するこれまでの研究をいくつか紹介し、いくつかの問題点を指摘した。全体をまとめると、以下のようになる。モード結合係数に関するこれまでの研究により、周期が短い脈動星では一般にモード結合が弱くなっており、多重周期脈動が起こりやすくなっていること、モード結合係数の間の関係によりモード選択の性質の変化が起こり、単一周期が現れたり、多重周期脈動が現れたりすることが明らかになった。しかし、実際に HR 図上のどの領域で多重周期脈動が起こるかについては、定量的には一致していない。脈動星の非線形現象の研究全体から考えると、モード結合係数に関する研究がさらに進んで、流体力学的模型による研究の指針を与えるようになることが重要である。

《参考文献》

Balona, L.A., 1985, in IAU Colloquium **82**, in *Cepheids: Theory and Observations*, ed. B.F. Madore, (Cambridge University Press), p17

Buchler, J.R. and Goupil, M.–J., 1984, Astrophys. J., **279**, 394

Buchler, J.R. and Kovacs, G., 1986, Astrophys. J., **308**, 661

Castor, J.I. 1971, Astrophys. J., **166**, 109

Dziembowski, W. and Kovacs, G., 1984, Monthly Notices Roy. Astron. Soc., **206**, 497

Ishida, T. 1990, Astrophys. and Space Sci., **167**, 173

Ishida, T., Takano, R., Yamakawa, F., and Takeuti, M., 1992, in the Proceedings of the IAU Colloquium **134**, (to be published)

Ishida, T. and Takeuti, M., 1991, Astrophys. and Space Sci., **178**, 311

Klapp, J., Goupil, M.–J., and Buchler, J.R., 1985, Astrophys. J., **296**, 514

Seya, K., Tanaka, Y., and Takeuti, M., 1990, Publ. Astron. Soc. Jap., **42**, 405

Simon, N.R., Cox, A.N., and Hodson, S.W., 1980, Astrophys. J., **237**, 550

Takeuti, M., 1985, Astrophys. and Space Sci., **109**, 99

Takeuti, M. and Aikawa, T., 1981, Sci. Rep. Tohoku Univ. 8th Ser., **2**, 106

Takeuti, M. and Buchler, J.R. (eds.), 1992, in the Proceedings of the IAU Colloquium **134** (to be published)

Takeuti, M., Yamakawa, F., and Ishida, T., 1992, Publ. Astron. Soc. Jap., (accepted)

Zalewski, J., 1992, in the Proceedings of the IAU Colloquium **134**, (to be published)