

流体力学模型の成功

竹内 峰 (柳町自然研究所)

目 次

1 流体力学模型	1
1.1 なぜ流体力学か	1
1.2 計算プログラム	2
2 琴座 RR 型変光星	3
2.1 星団型変光星	3
2.2 ベーリーの分類	4
2.3 ヘリウムの比率を解明	5
3 ケフェウス座デルタ型星の模型	6
3.1 基本様式での膨張収縮	6
3.2 異なった様式での膨張収縮	9
3.3 制動力と振幅	11
4 正弦波ケフェイド	12
4.1 カシオペヤ座 SU 星	12
4.2 対流の効果	12
5 夢の 3 次元模型	13

1 流体力学模型

1.1 なぜ流体力学か

脈動変光星の理論は、力学の基本路線にしたがって進んできた。すなわち、まず振動の振幅が極めて小さいとし、時間変化は正弦波で表されるとする。こういう近似を行うと、問題を微分方程式で表現し、比較的容易に

その解を求めることができる。しかし、このような近似を採用してしまうと、変光の振幅や変光曲線の形について考察を進めることができなくなる。

そこで、時間変化のようすや振幅についての仮定を外し、星の膨張収縮のようすを、流体の現象として把握し、数値シミュレーションで解いてみてはどうかという考えが生まれる。このためには、星を数十個の球殻で近似し、光度極大から次ぎの光度極大までを数百個の時間ステップに分割して計算することが必要である。このような計算には、少なくとも数十万ステップの数値計算を行わなければならない。

このような規模の計算を、そろばんや手回し計算器で行うことは、膨大な時間がかかるので、実行不可能である。電子計算機が実用になってようやく実際に試みることは可能になった。

電子計算機が実用に供されるようになっても、計算プログラムをどのように組むかについて課題があり、流体力学の法則をどのように扱うかについては、特別な研究が必要であった。

1.2 計算プログラム

星の膨張収縮を流体力学の法則に基づいて数値シミュレーションを行うにあたっての基本は、連続的に変わる圧力、密度、温度などの間の関係を、どのような形で、飛び々々の値の組み合わせで表現するかということである。例えば隣接する球殻間の圧力の違いを、それらの球殻の半径の差で割れば、圧力勾配に近い値が得られるであろう。しかし、その二つの球殻のさらに外側と内側の球殻の圧力を考えに入れて計算した方が、より現実の圧力勾配に近い値が得られるかも知れない。だが、近似式を複雑にすることにより計算が進まなくなることもある。どのような近似が適切かということは、実際に計算を進めてみて見当がついてくることがある。

星の表面は、実際は星間空間へ連続的につながっているが、最も外側の球殻ではその点をどう取り扱うかを考えなければならない。

また、計算を進めている間に、気体の運動速度が音速を超えるようなことが起きるかも知れない。このような場合、どのように取り扱うかも大きな課題となった。

さまざまな試みの後に、星の膨張収縮に数値シミュレーションの場合、気体の運動エネルギーの一部が熱に変わるという過程を、流体力学上の実際的な根拠なし仮定すると、計算が円滑に進み、しかも実際の気体球の運動にも近いことが分かった。このような人為的な熱の発生の手順を、**人工粘性** (artificial viscosity) と呼ぶ。この人工粘性の強さは、自然現象としては根拠がないのであるから、適当な値を仮定し、計算を進めてみて、実際の星の膨張収縮と似た現象が起きれば、それを採用することとなる。

星の膨張収縮を、このように流体力学に基づく数値シミュレーションで取り扱う計算プログラムを**流体力学模型** (hydrodynamic model あるいは hydrodynamical model) と呼ぶ。流体力学模型の細部には、多くの近似や工夫が必要なので、それが適切かどうかは、異なる研究者グループによる計算結果との比較によって検証されなければならない。

始めて流体力学模型で、星の膨張収縮の近似に成功したのは、ロス・アラモス研究所のグループである。この研究所には、このような研究の処理に適した電子計算機があり、かつ海中核実験のデータを参照することができた。しかし、当時の計算機の性能では、ケフェウス座デルタ型星の研究には無理があり、より半径が小さく、周期の短い琴座 RR 型星の研究から始められた。このノートも、琴座 RR 型変光星の問題から始めることとする。

2 琴座 RR 型変光星

2.1 星団型変光星

琴座 RR 型変光星の名称の元となった琴座 RR 星の変光が報告されたのは 1905 年で、ウィリアミナ・フレミング (Williamina Fleming) が発見した(1)。変光星総合目録 (GCVS) では、この星は、明るさは 7.06 等から 8.12 等の範囲で変動し、周期は 0.5869 日すなわち約 14.1 時間と記されている。地球大気の外側にあるハッブル望遠鏡での最近の観測結果では、この星の距離が 854 光年であることが確認され、タイプ II ケフェイドの研究を進める上での拠り所として注目されている(2)。

アメリカ変光星観測者協会 (AAVSO) では、この型の星の例として、白鳥座 XZ 星、獅子座 AH 星を挙げている。周期が短いことは、変光曲線を追いかける上で、短時日で結果が出ることにつながるので、詳しい研究ができる。

この型の変光星は、1890 年代、ソロモン・ベーリー (Solomon Bailey) やフレミングらの努力で、球状星団の中で数多く発見された。明るい球状星団ケンタウルス座オメガに含まれている星の中から三千個の星を選んで調べた結果では、125 個が変光星で、そのうち 98 個が周期 1 日以内であるという結果が 1898 年に発表されている(3)。琴座 RR 型変光星が、まず星団型変光星と呼ばれたのは、球状星団中でこのように多数発見されたことに由来している。

表 1: ベーリーによるケンタウルス座オメガ星団の変光星の分類

型	光度曲線の特徴	周期の範囲
a	急激な増光, 緩やかな減光 振幅 1 等級程度	0.5 ~ 0.6 日
b	急激な増光, 緩やかな減光 (a 型よりはいずれも緩やか) 振幅 1 等級より小さい	0.6 ~ 0.8 日
c	緩やか増光, 緩やかな減光 振幅 0.5 等級程度	0.3 ~ 0.4 日

表 2: 現在の琴座 RR 型変光星の分類

型	光度曲線の特徴	周期の範囲
ab	急激な増光, 緩やかな減光 振幅 0.5 ~ 2 等級	0.3 ~ 1.2 日
c	極大時を中心に前後対称 振幅 0.8 等級以下	0.2 ~ 0.5 日

2.2 ベーリーの分類

1898 年の報告の中でベーリーは、これらの短周期の変光星の変光を見ると、急激な増光と緩やかな減光がしばしば観測されるが、増光時間と減光時間とがあまり違わない星もあると記している。

ベーリーは 1902 年の報告で、球状星団ケンタウルス座オメガに含まれている変光星を 3 種類に分類した(4)。ベーリーのそもそもの分類を表 1 に掲げる。琴座 RR 型星のこのような特徴は、この星団の星に限らず広く認められ、ベーリーの分類として現在まで用いられている。

その後、光度極小から光度極大に至る時間の周期に対する割合を指標として光度曲線の特徴を定量的に表すことが試みられた。a 型ではその値は 0.1 から 0.2, b 型では 0.2 から 0.3, それに対して c 型では 0.4 から 0.5 であった。

a 型と b 型とは類似しており c 型とは明瞭に異なっているので、a 型と b 型とをまとめて ab 型として取り扱うようになり、現在、変光星総合目録 (GCVS) でもそのような分類を採用している。その特徴を表 2 に掲げる。

すなわち、琴座 RR 型星は、短周期で振幅が小さいグループと、長周期で振幅の大きいグループから成り立っている。振幅が大きいグループでは、

増光時と減光時の違いが鮮明であり、振幅が小さいグループでは正弦波に近い光度曲線になっている。

球状星団メシエ 3 の観測をしたマーチン・シュワルツシルド (Martin Schwarzschild) は、ベーリーの a 型, b 型と, c 型との周期が、色光度関係で見ると、周期比が 0.63 であることを確かめた。彼は、この違いは、基本様式の膨張収縮の周期と、第 1 陪振動の様式の膨張収縮の周期とに対応しているのではないかと考え、彼自身が理論的周期を計算して、その可能性があることを示した(5)。

このことについて、スヴェン・ロッセラン (Svein Rosseland) は、彼の有名な著書の中で、シュワルツシルドの説を紹介し、基本様式で膨張収縮しない星が、なぜ高次の陪振動様式で膨張収縮するのかという、はなはだ難しい問題が提起されているが、同じ星団の中で、化学組成が違うので周期が違うという推論も説得力があるとはいえないでの、これは今後の研究の課題であると記している(6)。

2.3 ヘリウムの比率を解明

ロバート・クリスティ (Robert F. Christy) は、1960 年代、琴座 RR 型星を流体力学模型を用いて近似することに成功した(7)。

その結果、同じ化学組成の模型であっても、表面温度を変えて計算すると、表面が高温の模型では第 1 陪振動様式で膨張収縮が起こり、表面が低温である場合には基本様式で膨張収縮が起こることが、確かめられた。彼はさまざまな化学組成の模型について計算し、水素が 70 パーセント、ヘリウムが 30 パーセント程度含まれているとした場合に、周期、振幅、変光曲線の形などの表面温度に対応する変化をうまく説明できるを確かめた。

当時宇宙の化学組成については議論が残っており、宇宙論の立場からはヘリウムの分量は、質量で比べて全体の 30 パーセント程度あるはずだという結果が出ていた。このような結果を示した研究のひとつとして知られているものに、林忠四郎 (Chushiro Hayashi) の仕事がある(8)。

ところが、星のスペクトル観測でヘリウムの比率を求めた結果は、たかだか 10 パーセントという値が得られており、現在知られているビッグバン説に対する問題点とされていた。しかし、星のスペクトルではヘリウムの線は顕著ではなく、その測定結果の精度は高くはなかった。

星の構造を調べ直すことにより、星の内部での水素とヘリウムとの比率を調べる研究も行われ、ヘリウムはかなりの比率で含まれていることが示唆された。このような研究としては浅野功義 (Naruyoshi Asano) らの仕事がある(9)。

琴座 RR 型変光星はタイプ II のケフェイドである。タイプ II の特徴は、

表 3: 模型の要素

質量	太陽の 5 倍
絶対光度	太陽の 2000 倍
表面温度	5500 度
化学組成	水素 70 パーセント ヘリウム 28 パーセント その他の元素 2 パーセント

重元素が少なく、かつ星が銀河面から離れたところにも存在することである。重元素は星の内部でできるので、重元素の少ないタイプ II のケフェイドは、宇宙の初期にできたと考えられる。したがって、琴座 RR 型星でどのような比率でヘリウムが含まれているかは、宇宙の初期にヘリウムがどの程度存在したかを示すものとして注目されていた。

クリスティの琴座 RR 型星を流体力学模型で研究した論文は、ビッグバン説を支えるものとして学界で高く評価され、宇宙論の進歩に役立った(10)。この研究は、変光星の脈動理論による成果としては、最も高く評価されて然るべきものである。

3 ケフェウス座デルタ型星の模型

3.1 基本様式での膨張収縮

クリスティの研究の成功の後、より高い能力を持った計算機が利用可能となるにつれて、より半径が大きく、周期の長い脈動星に模型が計算されるようになった。ケフェウス座デルタ型星の流体力学模型が研究されるようになり、ケフェイド不安定帯の変光星は、ほぼ説明されるようになった。

ここでは、ケフェウス座デルタ型星に相当する模型を例にとって、どのような結果が得られているかを説明しよう。模型の諸要素は表 3 に示してある。使用したのは、竹内峯、氏家慧一、石田俊人らが準備したコードで、現在ではパソコン上で結果が得られる。コードは対流の効果は無視して組まれてあり、星の膨張収縮を 178 個の球殻に分割して近似している。

負の復元力が期待される流体力学模型の場合、まず釣り合い状態での各球殻の半径、圧力、密度、温度等を計算し、それに基づいて時間が経過したのちの各球殻の物理量を求める。計算の精度の関係で残っている各物理量の微小な違いが成長し、やがて模型全体の膨張収縮が始まる。この過程は、かなりの計算時間が必要なので、通常は、各球殻がそれぞれ運動してい

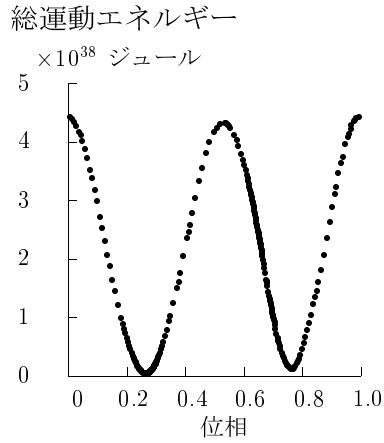


図 1: 模型の総運動エネルギーの時間変化. 模型の膨張時と収縮時に対応する極大が明瞭である.

るとして計算を開始する. 具体的には, 各球殻の速度が, 基本様式あるいは第 1 階振動様式などの速度分布に近い値を与える.

それでも, 振幅が一定になるのはかなりの計算時間が必要なので, 人為的に各球殻の運動エネルギーを増やすなどの操作をしたりする.

表 3 で示された要素の模型に, 最初表面の運動速度が 10 キロメートル毎秒の運動を与え, 内部の各球殻の速度が基本様式での分布に近いとして計算をスタートし, 膨張収縮の運動が極大になったところで人為的に各球殻の速度を 1.025 倍にして計算を進めたところ, 振幅がある大きさになったところで制動力が, 付け加えた力を上回るようになった.

そこで, 人為的速度増加を止めて計算を続行し, 膨張収縮がほぼ安定したところで模型の状態を観察した結果を図 1, 図 2 に示した.

周期が 6.582 日になっており, 平均からの光度の差は, 光度極大で 0.5 等明るくなつておき光度極小では 0.9 等暗くなつていた. すなわち, 振幅は 1.4 等であった.

図 1 に示した総運動エネルギーは, 各球殻の運動エネルギーを加えた量で, 模型の膨張収縮のようすを最も明瞭に示している. 図の位相は, 総運動エネルギーが模型の膨張運動中に極大となっている時をゼロとしてある. 位相 0.5 付近の総運動エネルギーの極大は, 模型が収縮運動をしている時に対応している.

この図で注目されるのは, 位相が 0.25 と 0.75 との付近で, 総運動エネルギーがほぼゼロになっていることである. これは, 模型が膨張しきった時(半径極大時)と収縮しきった時(半径極小時)とには, 模型のすべての球殻がほぼ静止状態にあることを示している.

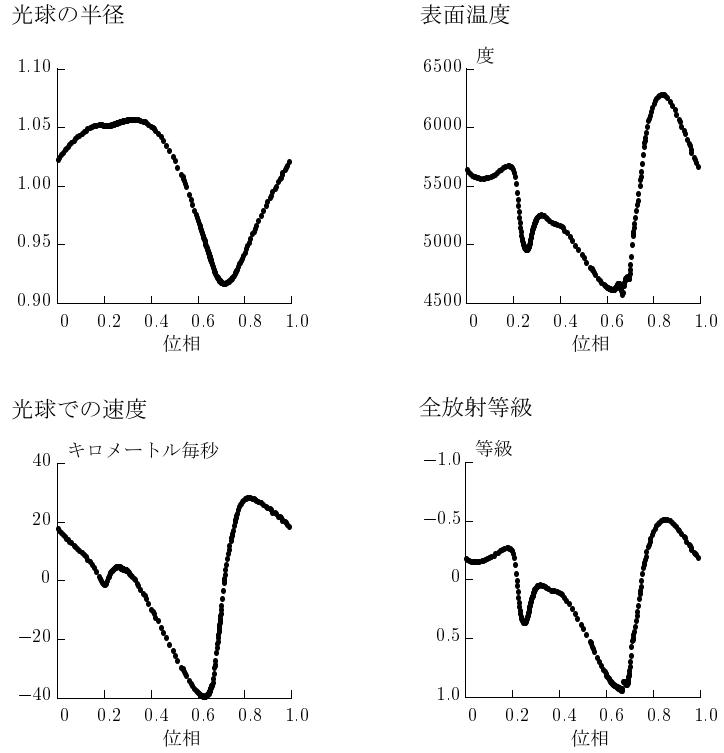


図 2: 模型の諸要素の時間変化. 光球の半径の変化は, 釣り合い模型の場合との比で示してある.

図の点の間隔は, 計算を進めている際に, どの程度の時間間隔で計算すれば, 設定した精度の結果が得られるかに対応している. 模型の計算にあたって, 最も短時間ごとの結果を積み重ねなければならないのは, 半径極小の直前の時期であることが見て取れる.

このことについては, 石田俊人 (Toshihito Ishida) らの詳しい研究があるが, 星が収縮する時期には内向きの衝撃波が生じるからである (11).

図 2 に, 半径, 速度, 温度, 全放射等級などの変化を示した. 半径などは, いずれも星の表面の値として観測と比べることのできる球殻での値であつて, 模型の表面の値ではない.

半径はなめらかに変動しているが, 速度には位相 0.2 付近で変動が見られる. 総運動エネルギーにはこれに対応する変動が見られないで, この速度変動は, 模型の表面近くのごく浅い部分での変動であることが分かる. この浅い場所の変動は, 温度で見ると数百度の変動になり, 明るさでも目立った変動となっている.

ケフェイドの明るさの変化が, もっぱら表面温度の変化に起因しているので, 表面近くでのわずかな変動が, 明るさに反映していることがよく分

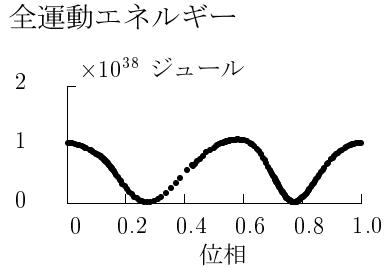


図 3: 模型の総運動エネルギーの時間変化（小振幅の場合）．同一の模型なのに振幅が前の場合の 4.5 分の 1 である．周期は 0.656 倍と短くなっている．

かる．

模型の表面近くで衝撃波が生じた場合，衝撃波面に凸凹が生ずると思われるが，この模型ではそのような動きを無視しているので，近似の精度が低くなる．ここで見られる明るさの変化が，どれほど現実を反映しているのか，また，ある程度現実を反映しているとしても，毎回このような光度変化が繰り返されるのかは，分からぬ．

ここ百年間の脈動変光星観測は，光度曲線が毎回正確に同じではないということを示しているが，星の表面のわずかな波動の揺らぎが，温度の変化を招き，それが明るさの変化に直結していることを思えば，当然のことといえよう．

3.2 異なった様式での膨張収縮

前節で模型がほぼ安定した膨張収縮を繰り返しているようすを示した．ところが，全く同じ模型を人為的な速度の増加を行わずに計算を進めると，当初は周期 6.6 日前後で膨張収縮を繰り返しているが，やがて周期が短くなり第 1 陪振動様式の膨張収縮に変わってしまう．このような例は，他の研究者の模型でも発見されている．

総運動エネルギーの変動を図 3 に示したが，この場合は極大値が，前の例の 4.5 分の 1 となっている．周期は，4.578 日で，前の例の 0.656 倍であり，第 1 陪振動様式で膨張収縮している．

この場合，同じような膨張収縮が繰り返されるようになった時の状態を図 4 に示す．基本様式での膨張収縮の場合に比べて，速度，温度，明るさともなめらかである．

半径の変化はわずかに小さくなっている．光球での速度の変化の幅はあまり変わらないが，内向きよりは外向きへの動きが目立っている．表面温度の変動の幅はわずかだが小さくなっている．その結果，光度の振幅は 1.4

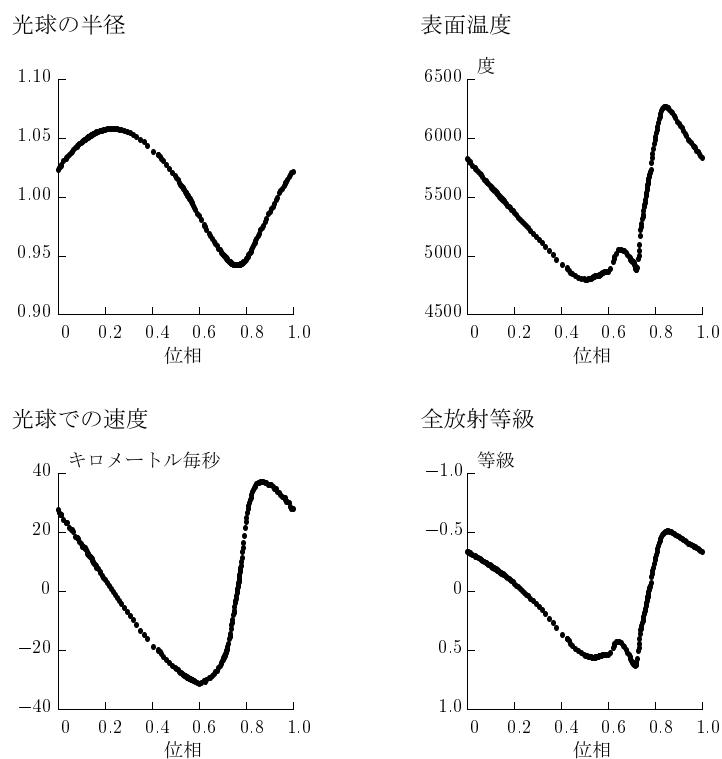


図 4: 模型の諸要素の時間変化（小振幅の場合）. 前の場合に比べて、いずれの変動もなめらかである。

表 4: 流体力学模型の振幅と制動力

膨張収縮の振幅	制動力
微小 ↓ 極限振幅	負
↑ 大きすぎる	ゼロ 正

等から 1.1 等に減少している。

このような観測されるであろう量の変動幅の減少もあるが、全体として変動がなめらかになっていることに気付く。

この模型では、基本様式での膨張収縮と、第 1 陪振動様式での膨張収縮とでは、基本様式の方が、振幅が大きくなっているが、もっと表面温度の高い模型で計算すると、基本様式での膨張収縮の方が振幅が小さくなり、やがて第 1 陪振動様式の膨張収縮のみが見られるようになる。

3.3 制動力と振幅

ノート No. 3 で星の膨張収縮に際して考えられる制動力について考察した。流体力学模型を用いると、膨張収縮の運動を人為的に加減できるので、振幅の大きい動きや振幅の小さい動きについて、その後の運動の変化を見ることができる。

そうすると、振幅をある程度以上大きくして計算すると、振幅が小さくなる。これは、模型の膨張収縮運動に対して制動力が働いているということである。振幅が小さい場合には、振幅が増加するので、これは負の制動力が働いているということである。実際に安定して持続する膨張収縮運動は、制動力が正でも負でもなく、制動力ゼロの振幅で可能になる。すなわち、表 4 のようになっている。

この表で**極限振幅** (limiting amplitude) と記してあるが、これは数学の用語で、振幅が小さい場合には振動が成長し、振幅が大きい場合には振動が減衰するような系で、どこかで振幅が変わらない振動が存在する場合に、その振幅を指している。

この節で示した模型は、基本様式での振動の場合と、第 1 陪振動様式の場合とでは、制動力がゼロになる振幅が異なることを示している。周期の短い運動の方が、気体の膨張収縮の動きは速くなり、そのため小振幅でも強い制動力が働くので、振幅の小さいところで変光が持続することになるのであろう。

4 正弦波ケフェイド

4.1 カシオペヤ座 SU 星

変光星総合目録に DCEPS というグループがある。定義は、ケフェウス座デルタ型の星で、実視等級での振幅が 0.5 等級以下で、光度曲線がほぼ対称になっている星とされている。周期はおおむね 7 日を超えない。

DCEPS は正弦波ケフェイド (sinusoidal Cepheids) という意味で、英語では *s-Cepheids* と表記されている。最初にこのグループについて注目したのはセシリア・ペイン・ガポシキン (Cecilia Payne-Gaposchkin) で、マゼラン星雲のケフェイドの綿密な検討の中で、独立したグループとした (12)。

正弦波ケフェイドの明るい例としては、カシオペヤ座 SU 星が知られている。この星が変光星であるという報告は 1907 年に発表されており、正弦波型の見事な光度変化の図が得られている (13)。この星は実視等級が 5.70 から 6.18 等の範囲で変動する。振幅が 0.48 等であるから、小振幅である。周期は 1.949 日で、ほぼ 2 日に近い。この星の変光曲線を再現するための研究が行われたが、対流を無視した計算では、うまく再現することができなかった。

4.2 対流の効果

ケフェイド不安定帯の星の膨張収縮を考える際、対流の効果を無視しても、おおよそのことは解明できるというのが、20 世紀後半の脈動理論の流れであった。流体力学模型においても、クリスティの模型以降、対流を無視した模型によって研究が進められ、琴座 RR 型星を手始めに多くの星の変光曲線が再現されてきた。しかし、別のノートで記すことになるが、カシオペヤ座 TU 星など、唸りを示すケフェイドを再現できないなど、その限界が見えてきていた。

星の中で熱が伝達される過程を考えた際に、対流が取り扱いづらいのは、放射や伝導ではその場の温度勾配で熱の移動率を求めるができるのに對して、内側から高温の塊が上昇してきたり、外側から低温の塊が下降してきたりする現象を考えなければならないからである。1980 年代以来、幾つかの取り扱いが試みられて来たが、ミハエル・フォイヒティンガー (Michael Feuchtinger) やコラート・ゾルタン (Zoltan Kolláth) などは、熱の流れの一部が乱流となり、その圧力の差が球殻の運動に影響を与えるという過程を考慮した模型について計算し、観測と比較できる結果を得た。

フォイヒティンガーたちは、正弦波ケフェイドの周期と振幅との関係を再現した (14)。コラートたちは、唸りを示すケフェイド (今後公開する予

定のノートで詳しく取り扱う) の再現に成功した(15).

対流の影響は、ケフェイド不安定帯の星では重要でないとされてきたが、二つの異なる様式の膨張収縮が関わり合う場合には、対流が両者の動きを共存させるような役割を果たすので、無視しがたくなるのであろう。

5 夢の3次元模型

ケフェイド不安定帯の星の研究では、不透明度の高い領域の効果を詳しく検討することにより、星の膨張収縮を持続させる機構が解明され、これらの星の質量、進化の段階について多くの知見が得られた。しかし、これらの星の変光曲線の振幅、形などについては、流体力学模型を用いて研究することが必要であった。

流体力学模型は、電子計算機の性能が向上するにつれて可能となり、その最初の成果は、クリスティによる琴座 RR 型変光星の光度曲線の再現と、これら種族 II の星の水素とヘリウムの比率について、貴重な知見をもたらしたことであった。水素とヘリウムの比率については、さまざまな研究があったが、クリスティの研究は大きな役割を果たした。

しかし、複数の膨張収縮様式の関わる現象については、乱流状態になっている対流を考慮に入れた模型を考える必要があった。ジャン・ロベール・ブシュレ (Jean-Robert Buchler) は、この模型でミラ型変光星を研究しようとしたが、うまく計算を進めることができなかつた(16)。ケフェイド不安定帯の星における対流と、ミラ型変光星における対流とは、異なった取り扱いが必要なのである。

対流では、気塊が上昇する場所と下降する場所とは、同じではない。太陽表面でも、大きく見ると高温の気塊が湧き上がってくる領域と、沈み込んで行く領域とがある。このような動きを研究するためには、星を幾つかの球殻に分割して調べるという手法では不充分で、気塊の水平方向の動きも考慮した数値シミュレーションを行うことが望まれる。しかし、電子計算機の能力との関係もあり、これまでのところ研究者の夢に過ぎない(17)。

ミラ型変光星の研究で、熊の理論 (ノート No. 3) が成果を挙げているが、これを流体力学模型に応用したらどのような結果になるかに関心が持たれる。

参考文献

- [1] Pickering, E. C., Colson, H. R., Fleming, W. P., Wells, L. D., 1901: Sixty-four New Variable Stars. *Astrophys. J.*, Vol. 13, p. 226

- [2] Benedict, F. G., McArthur, B. E., Fredrick, L. W. et al, 2002: Astrometry with the Hubble Space Telescope: A Parallax of the Fundamental Calibrator RR Lyrae. *Astron. J.*, Vol. 123, p. 473
- [3] Bailey, S. I., 1898: Variable Stars in Clusters. *Astrophys. J.*, Vol. 8, p. 233
- [4] Bailey, S. I., Pickering, E. C., 1902: A Discussion of Variable Stars in the Clusters. ω Centauri. *Ann. Astron. Obs. Harvard Coll.*, Vol. 38
- [5] Schwarzschild, M., 1941: Overtone Pulsations for the Standard Model. *Astrophys. J.*, Vol. 94, p. 245
- [6] Rosseland, S., 1949: *The Pulsation Theory of Variable Stars* Oxford, Clarendon Press (Dover 版が出ている), p. 49
- [7] Christy, R. F., 1966: A Study of Pulsation in RR Lyrae Models. *Astrophys. J.*, Vol. 144, p. 108
- [8] Hayashi, C., 1950: Proton-Neutron Concentration Ratio in the Expanding Universe at the Stages preceding the Formation of the Elements. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 5, p. 224
- [9] Asano, N., Sugimoto, D., 1968: Primordial Helium and the Luminosity of Horizontal-Branch Stars. *Astrophys. J.*, Vol. 154, p. 1127
- [10] Danziger, I. J., 1970: The Cosmic Abundance of Helium. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, Vol. 8, p. 161
- [11] Ishida, T., Takeuti, M., 1991: Shock Phenomena in a Hydrodynamic Model of Classical Cepheid. *Publ. Astron. Soc. Jap.*, Vol. 43, p. 795
- [12] Payne-Gaposchkin, C., 1959: Cepheid Variables and the Period-Luminosity Relation. *J. Washington Acad. Sci.*, Vol. 49, p. 333 (*Harvard Reprint Series I*, No. 536 として配布されている)
- [13] Parkhurst, J. A., 1908: Photographic Light-curve of the Variable Star SU Cassiopeiae. *Astrophys. J.*, Vol. 28, p. 278
- [14] Feuchtinger, M., Buchler, J. R., Kollath, Z., 2000: Hydrodynamical Survey of First-Overtone Cepheids. *Astrophys. J.*, Vol. 544, p. 1056

- [15] Kolláth, Z., Buchler, J. R., Szabó, R., Csubry, Z., 2002: Nonlinear Beat Cepheid and RR Lyrae Models. *Astron. Astrophys.*, Vol. 385, p. 932
- [16] Buchler, J. R., 2002: *private communication*
- [17] Csubry, Z., Kolláth, Z., 2006: A New Tool in the Modelling of Stellar Pulsations. *Astrophysics of Variable Stars*, eds. C. Sterken, C. Aerts, ASP Conf. Ser., Vol. 349, p. 215

変光星ノート	No. 4	流体力学模型の成功
2008 年 4 月		
柳町自然研究所		
〒 980-0811 仙台市青葉区一番町 1-8-10-504		