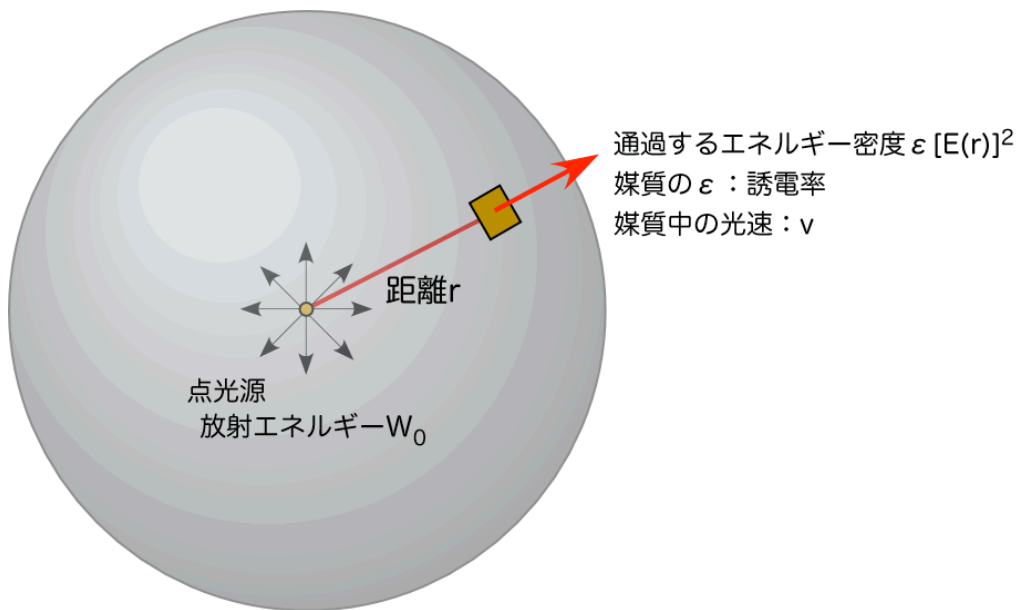


宇宙の観測と技術

第11章 フーリエ光学と干渉計

29. 光の伝播

物体の放つ光は、その放射面上の1点を考えると、そこから常に球面波として光波が放射されている。ここで放射された光波（電磁波）の状態とは空間上の各観測点における電場の状態「 $E(x, y, z, t)$ 」である。今、空間上の点光源からあらゆる方向に単位時間に放射される電磁波の全エネルギーを W_0 （一定）とすると、光源から距離 r だけ離れた場所を単位時間を通してエネルギー密度は球面上での電場の振幅 $E(r)$ を使って



$$4\pi r^2 \cdot \epsilon |E(r)|^2 \cdot v = W_0$$

という関係（エネルギー保存則）より

$$\epsilon |E(r)|^2 = \frac{W_0}{4\pi r^2 \cdot v}$$

と表すことができる。これより距離 r での光波による電場の振幅は

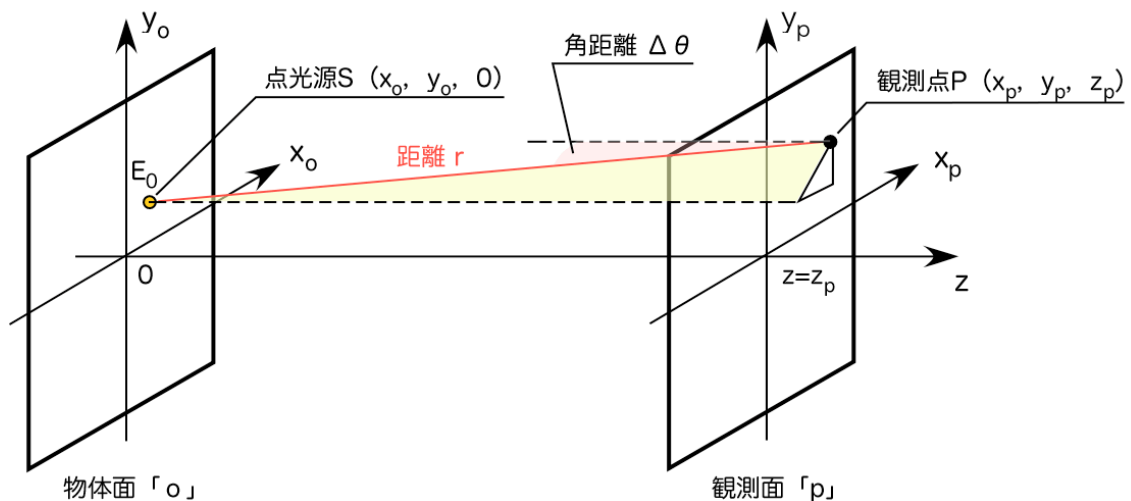
$$E(r) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon \cdot v} \frac{W_0^{1/2}}{r}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon \cdot v} \frac{E_0}{r}}$$

となる。ここで E_0 は光源（放出場所）での電場の振幅ということができる。

次に電磁波である光がつくる球面上での電場の時間変化を考えよう。この波の成分を複素指数関数： $\exp(i \cdot \theta)$ を使って次のように表す。

$$E(t,r) = K \frac{E_0}{r} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}(ct-r)}, K = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon \cdot v}}$$

ここで係数 K は光が伝播する媒質に関係した部分を定数としてまとめたものである。真空では $\epsilon = \epsilon_0 (=8.85 \times 10^{-12} [\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^4\text{A}^2])$ 、 $v = c (3.0 \times 10^8 [\text{ms}^{-1}])$ になる。これが1点から出た球面波(点光源)が距離 r だけ空間を伝播した時の電場の式になる。この光波は、本来、球面波であるが無限遠(あるいは十分遠方)にまで到達する頃には観測点上で十分に平面波と見なせるようになる。この条件下で、物体面「o」上にある点光源 S から放射された光波が、観測面「p」上にある観測点 P につくる電場を求めてみる。



P で観測される電場は点光源 S と観測点 P の距離 r で決まる。

$$r = \sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - y_o)^2 + z_p^2}$$

$$= z_p \sqrt{1 + \frac{(x_p - x_o)^2 + (y_p - y_o)^2}{z_p^2}}$$

観測面は物体面から十分に遠方にあるという条件から、平方根を2項展開してやると、結局、点光源 S と観測点 P の距離 r は

$$r \approx z_p \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_p - x_o)^2 + (y_p - y_o)^2}{z_p^2} \right)$$

と近似される（簡単になった）。ここで右辺括弧中の第2項は観測点Pから見た光源Sの角距離（観測面の向き：法線から測った角度→ $\Delta\theta$ ）で表せる。つまり点Pで観測される電場は角距離 $\Delta\theta$ を使って

$$E(t, x_p, y_p, z_p) = K \frac{E_0}{z_p} e^{-2\pi i \frac{ct}{\lambda}} \cdot e^{2\pi i \frac{z_p}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} \Delta\theta^2\right)}$$

$$\Delta\theta(x_p, y_p, z_p) = \sqrt{\frac{(x_p - x_o)^2 + (y_p - y_o)^2}{z_p^2}}$$

となる（さらに簡単になった）。ただし十分遠方では電場の減衰にあたる因子： $1/r$ は $x_p - x_o$, $y_p - y_o$ に対して非常に鈍い関数（殆ど変化しない）なので $1/z_p$ と置いた。

ここで導入した複素指数関数： $\exp(i \cdot \theta)$ は、純虚数*i*を使って三角関数を指数関数に統合してしまうアイデアである。定義は

$$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i \sin\theta$$

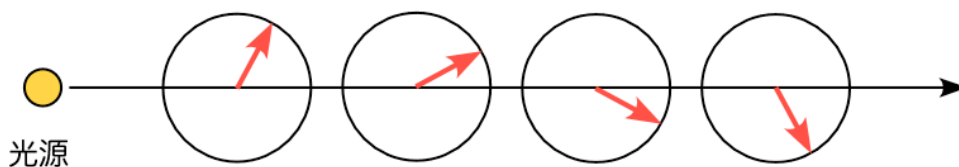
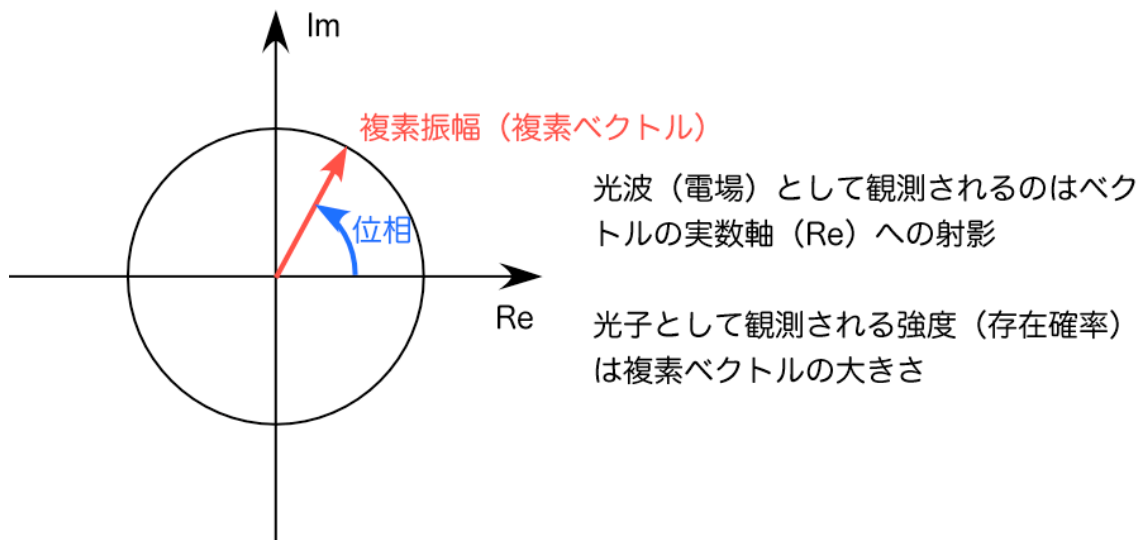
であり値は複素数となる。この定義を使うと無理矢理暗記していた「三角関数の加法定理」などは、簡単に計算で導けてしまうので試しにやってみると良い。

さて光波を

$$\psi(t) = e^{-i\omega t}, \quad \omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}$$

と表現したとき、複素数の値を持つ関数を物理的にどう解釈するかであるが、物理量として観測できるのは実数部分のみとしておけばよい。虚数部分は観測不能な別の次元に現れている量である。このように表現された波の関数を「複素振幅」と呼ぶ。

光や電子など量子力学的な粒子の運動を複素振幅で表すことで、物質のもつ粒子性と波動性を直感的にイメージすることができる。光の伝播については下図のようになる。



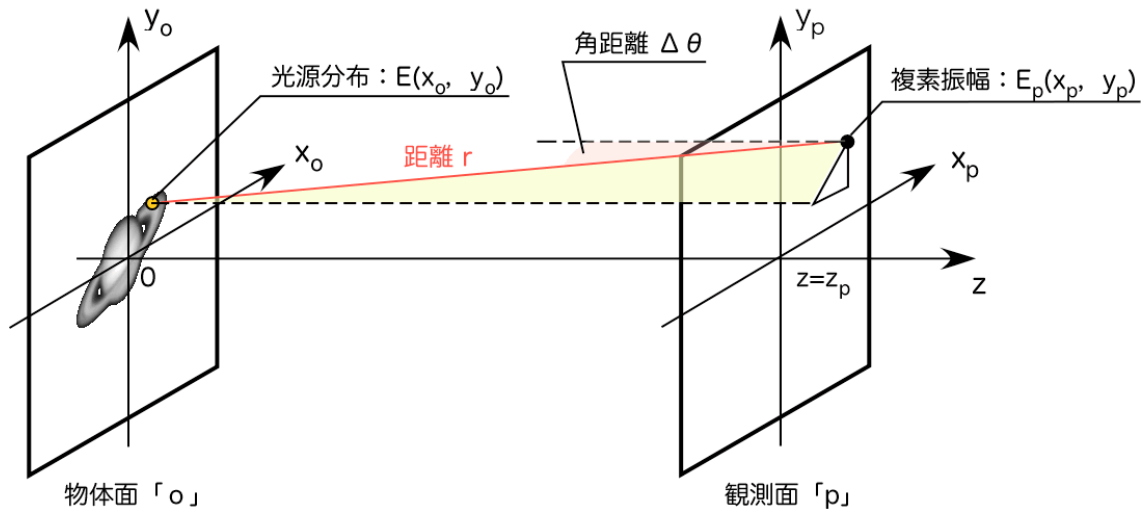
光子は複素振幅を周波数 ν ($= c / \lambda$) で回転させながら光速 c で飛んでくる
 このような直感的イメージによって光と物質を説明している読み物に

「光と物質のふしぎな理論」 R.P. ファインマン 岩波書店

がある。夏休み中に一読を薦める。

29-1. フラウンフォーファー回折

光源の各点から放射された球面波が遠方で平面波とみなせるまでに変化する現象をフラウンフォーファー回折という。天体からやってくる光は何十光年以上もの距離を伝播して地球に到達する。この距離では光源である天体の占める物体面も観測点がある地球の占める観測面もその大きさは殆ど影響しない。つまり天体の光源分布の各点から出た光は理想的なフラウンフォーファー回折を受けていることになる。そこで物体面「o」にある光源分布の複素関数 $E(x, y)$ について、観測面「p」で生じるフラウンフォーファー回折された光波の複素振幅 $E_p(x_p, y_p)$ を点光源の時と同様に計算してみる。違いは物体面「o」の各点から観測面「p」に到達する光波の電場を全て足し合わせる場所である。



それは先の点光源に対して導いた式を物体面「o」全域に対して積分したものとなる。すなわち

$$E_p(t, x_p, y_p) = \frac{K}{z_p} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-z_p)} \iint_{[o]} E(x_o, y_o) e^{-2\pi i \frac{z_p}{\lambda} \Delta\theta^2} dx_o dy_o$$

ここで被積分関数中の $\Delta\theta$ は

$$\Delta\theta(x_p, y_p, z_p) = \sqrt{\frac{(x_p - x_o)^2 + (y_p - y_o)^2}{z_p^2}}$$

と置いたのだから

$$\Delta\theta(x_p, y_p, z_p)^2 = -\frac{2}{z_p^2} (x_p x_o + y_p y_o) + \frac{x_o^2 + y_o^2}{z_p^2} + \frac{x_p^2 + y_p^2}{z_p^2}$$

となる。 $\Delta\theta$ の関数形は波面の形状を表している。フラウンフォーファー回折では観測面「p」に到達する光波面は平面波とみなせることから x_o, y_o の2次の項は無視し、平面の成分だけを残す。従って

$$E_p(t, x_p, y_p) = \frac{K}{z_p} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\left(ct-z_p-\frac{x_p^2+y_p^2}{2z_p}\right)} \iint_{[o]} E(x_o, y_o) e^{-2\pi i\left(\frac{x_p}{\lambda z_p}x_o + \frac{y_p}{\lambda z_p}y_o\right)} dx_o dy_o$$

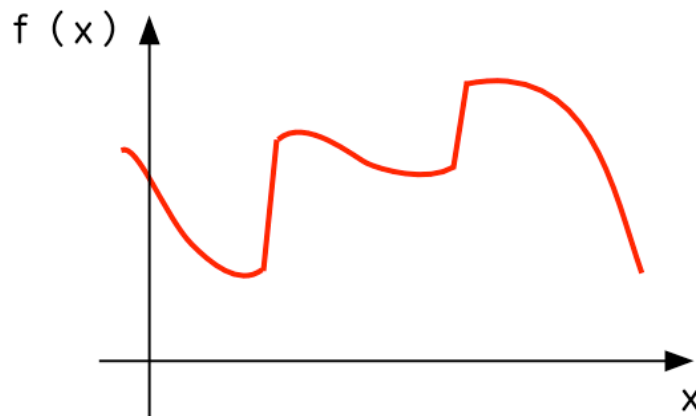
が観測面「p」で観測される光波の複素振幅（電場）である。

29-2. フーリエ変換とフラウンフォーファー回折

数学でいうフーリエ変換とは、次のような概念があって成立している。

概念1：自然に存在する形は幾つかの波形を重ね合わせて表現できる

この自然に存在している形というのを数学的に言えば、ある範囲（つまり有限な大きさ）で区分的になめらかであり不連続点を含まない（つまり段差が所々あっても良いがちゃんとつながっている）形ということになる。例をあげればこんな形である。



概念2：「形を知っている」ということと「波形の重ね方を知っている」ことは情報として等価である

適当な形が波の重ね合わせで表現できてしまうのなら、形そのものの情報「座標 x に対する値 $f(x)$ 」を知っていることと、波の重ね方の情報「周波数 ν の波に対する波の振幅 $a(\nu)$ とずらし量 $\phi(\nu)$ 」を知っていることは同じ価値を持つことになる。一般に波の重ね方の情報（フーリエ係数）とは複素数

$$w(\nu) = a(\nu) \exp(i \cdot \phi(\nu))$$

であり、このとき関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \int w(\nu) e^{2\pi i \nu x} d\nu$$

となる。

概念3 ある形を表す関数 $f(x)$ と波の重ね方を表す関数 $w(\nu)$ は、一方から他方を計算できる関係にある。

関数 $f(x)$ がわかっている時、 $f(x)$ を使って波の重ね方 $w(v)$ を求める計算を“フーリエ変換”と言い

$$w(v) = \int f(x) e^{-2\pi i v x} dx$$

で求めることができる。ちなみに2次元フーリエ変換は x, y に対応する周波数を u, v とすると

$$w(u, v) = \iint f(x, y) e^{-2\pi i (ux + vy)} dx dy$$

となる。逆に波の重ね方 $w(v)$ がわかっている時、 $w(v)$ を使って元の関数 $f(x)$ に戻す処理を“逆フーリエ変換”と言う。

ここで先のフラウンホーファー回折によって生じる複素振幅の式

$$E_p(t, x_p, y_p) = \frac{K}{z_p} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \left(ct - z_p - \frac{x_p^2 + y_p^2}{2z_p} \right)} \iint_{[o]} E(x_o, y_o) e^{-2\pi i \left(\frac{x_p}{\lambda z_p} x_o + \frac{y_p}{\lambda z_p} y_o \right)} dx_o dy_o$$

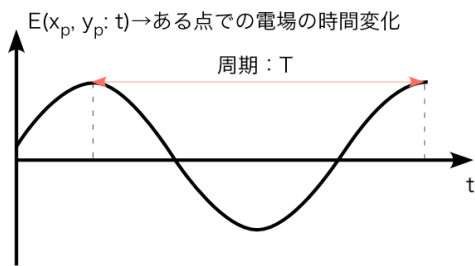
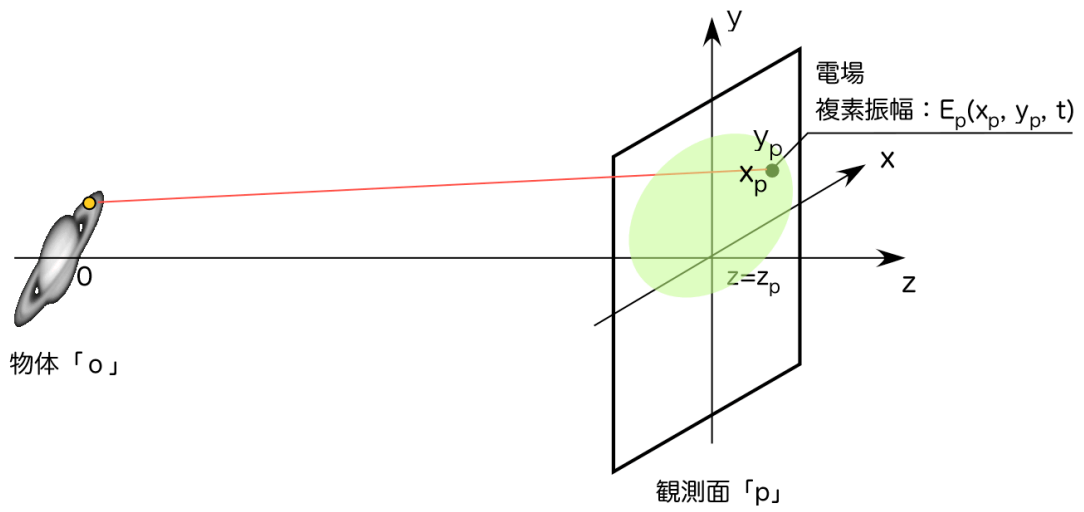
をあらためて眺めてみると、この式の中の積分はフーリエ変換になっていることがわかる。ここで

$$u = \frac{x_p}{\lambda z_p}, \quad v = \frac{y_p}{\lambda z_p}$$

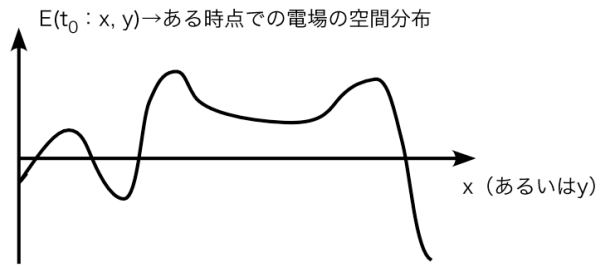
と変数変換すれば、

$$E_p(t, u, v) = \frac{K}{z_p} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \left(ct - z_p - \frac{x_p^2 + y_p^2}{2z_p} \right)} \iint_{[o]} E(x_o, y_o) e^{-2\pi i (u x_o + v y_o)} dx_o dy_o$$

と書き直すことができるのでよりはっきりする。ここで積分の外に出ている係数のうち指数関数中の x_p, y_p は実質的に関数 E_p の形に影響しないので、フラウンホーファー回折でできる複素振幅の分布は光源分布のフーリエ変換と言ってよい。ただし周波数 u, v を観測面の x_p, y_p に直す時には変数変換に従ってスケールを変える必要がある。この周波数 u, v は光源の2次元分布(形)に関する情報であり、光波の時間的な変動に関する周波数(色)ではない。この u, v は「空間周波数」と言って振動の周波数とは区別する。



周波数： $1/T$



空間周波数： u (あるいは v)

空間分布を表現できる三角関数 (変数 x, y) の周波数

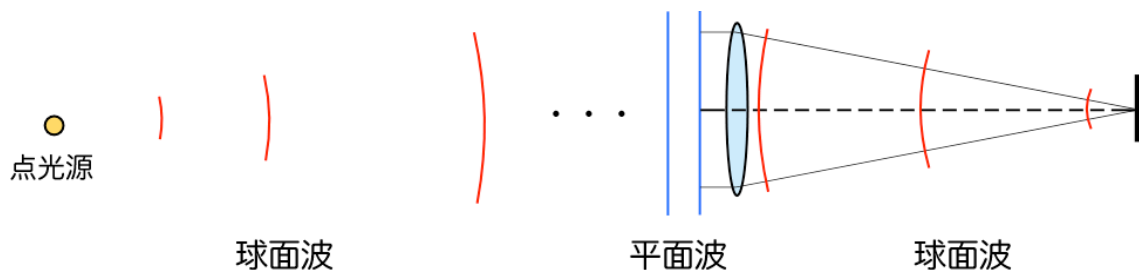
通常の時間変化する波の周波数と、形を表現する波の空間周波数との違い

30. フーリエ光学

天体の光源分布（見た目の姿）から出た光波が地球ではフラウンフォーファー回折されて全く違う光波の状態に変化しているというなら、天体望遠鏡は光波に対して何をして天体像を作るのだろうか。ここでは天体から放出された光波が望遠鏡の開口に達し焦点面で像を結ぶまでに起こることを解説する。

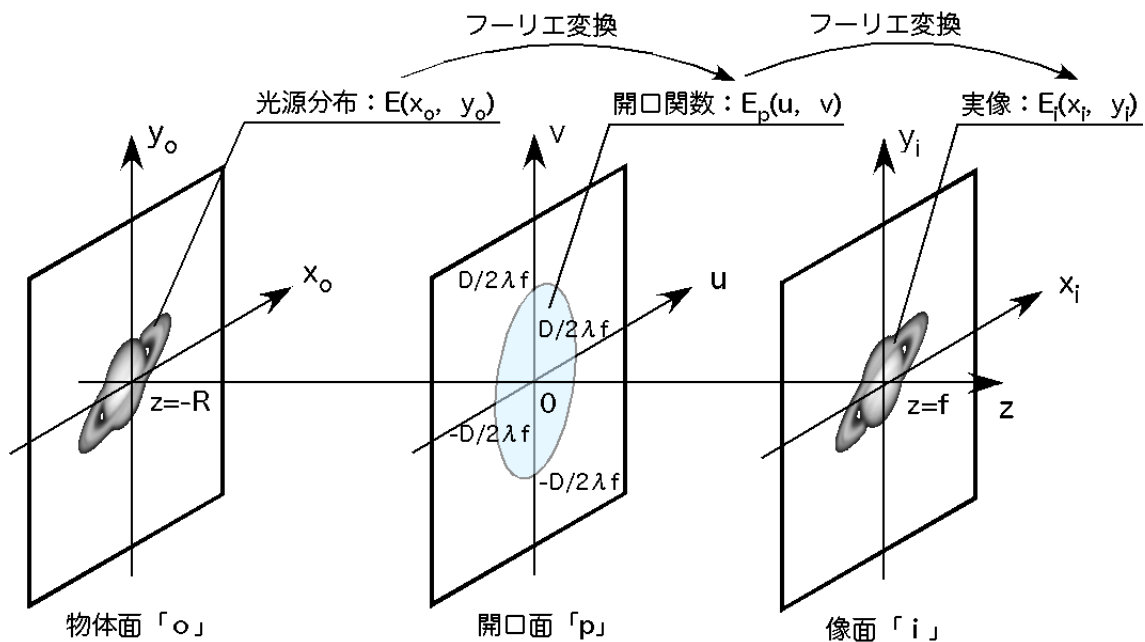
30-1. レンズとフーリエ変換

レンズに代表される光学系によって波面に何が起きているのだろうか。簡単のために点光源を考えるとレンズは開口面に到達した光（平面波）を屈折させて焦点面で再び1点に集めようとする。これは無限とも言える距離を経て球面波から平面波に転じた光を有限の距離（焦点距離）で時間を逆回しにして点光源へと戻しているようなものである。



つまりは入射した光波面に逆フラウンフォーファー回折をかけているとすることができる。フラウンフォーファー回折は数学的にはフーリエ変換と同等であるからレンズによって行われているのは逆フーリエ変換である(?)。ところが実際には像面に物体の倒立像ができてしまう（逆変換ならば正立像になるはずだ）。倒立像は像面における二つの座標軸を反転したものである。実を言えば、レンズがつくる像は開口面における光の複素振幅をフーリエ変換したものということになる。

通常、特に天文学においては物体面の光源分布を知ることはできない。したがって光学系で考える光波の情報は、開口面における光の複素振幅（開口関数）と像面における複素振幅（実像関数）の関係だけでよい。



$$E_i(x_i, y_i) = \iint_{[p]} E_p(u, v) e^{-2\pi i(ux_i + vy_i)} dudv$$

ただし、ここで空間周波数 u, v の定義と積分範囲はフラウンホーファー回折のそれとは異なることに注意が必要である。

まず空間周波数は光学系の焦点距離 f を使って

$$u = \frac{x_p}{\lambda f}, \quad v = \frac{y_p}{\lambda f}$$

となる。また積分範囲は光学系の開口形状に制限される。口径 D のレンズの場合には半径 $D/2$ の円形開口となるから

$$\left(\frac{D}{2\lambda f} \right)^2 \geq u^2 + v^2$$

を満たす u, v が積分範囲である。

30-2. 光学系と電磁波の受信

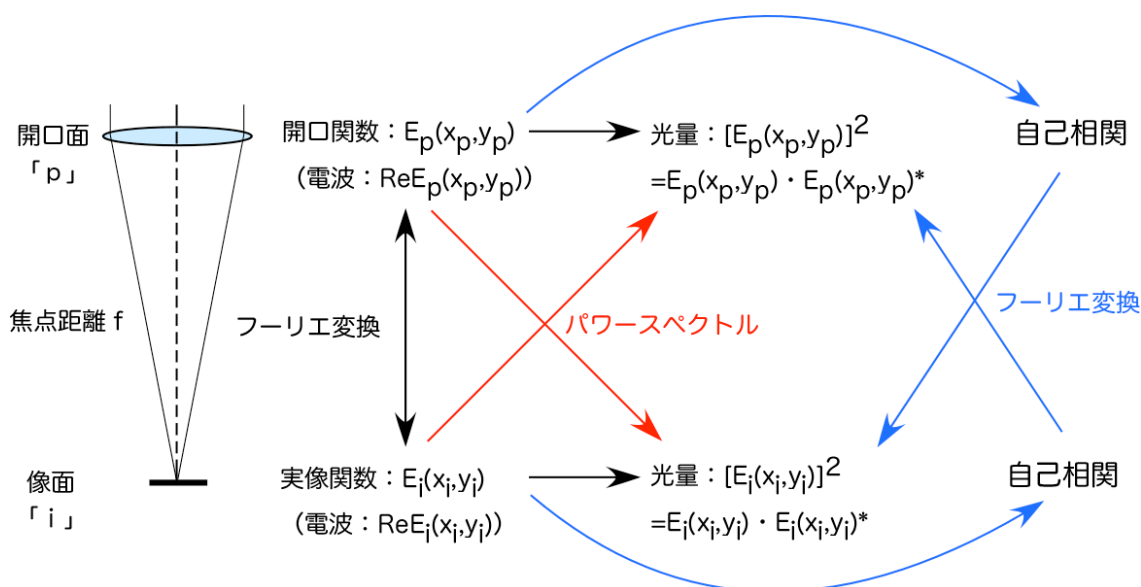
光源から放射される光を観測面あるいは光学系を通して像面で受けると言ってもプロセスは一つではない。光は電磁波で波長によって呼び方が異なること

は既に述べた。例えば波長 1mm 弱のサブミリ波までの電波と呼ばれる電磁波では、我々は光の複素振幅がつくる電場の振動を直接受信することができる。一方で可視光に代表されるような電波よりも波長の短い電磁波では、我々は光の複素振幅の波を受けることは不可能である。

サブミリ波：波長 0.1mm～1mm、周波数～1THz (テラヘルツ 10^{12})

可視光：波長 550nm ($0.5 \mu\text{m}$)、周波数～500 THz

電波よりも波長の短い電磁波の受信は、やってくる光のエネルギー（光量）を計測することによって行われている。これは複素振幅の自乗すなわち複素ベクトルの大きさ（の2乗）を測ることになる。開口面および像面で計測される関数の光学系による変換関係を下図に示す。



この時、開口面と像面でのそれぞれの関数の座標は光学系の焦点距離 f と波長 λ を使って変数変換される。ここで自己相関の定義は

$$ACF[f(x,y)] = \iint_{-\infty \rightarrow \infty} f(x_0, y_0) f^*(x_0 - x, y_0 - y) dx_0 dy_0$$

である。関数名についての「*」は複素共役であることを表す。複素共役とは

$$x + iy \leftrightarrow x - iy, r \cdot e^{i\phi} \leftrightarrow r \cdot e^{-i\phi}$$

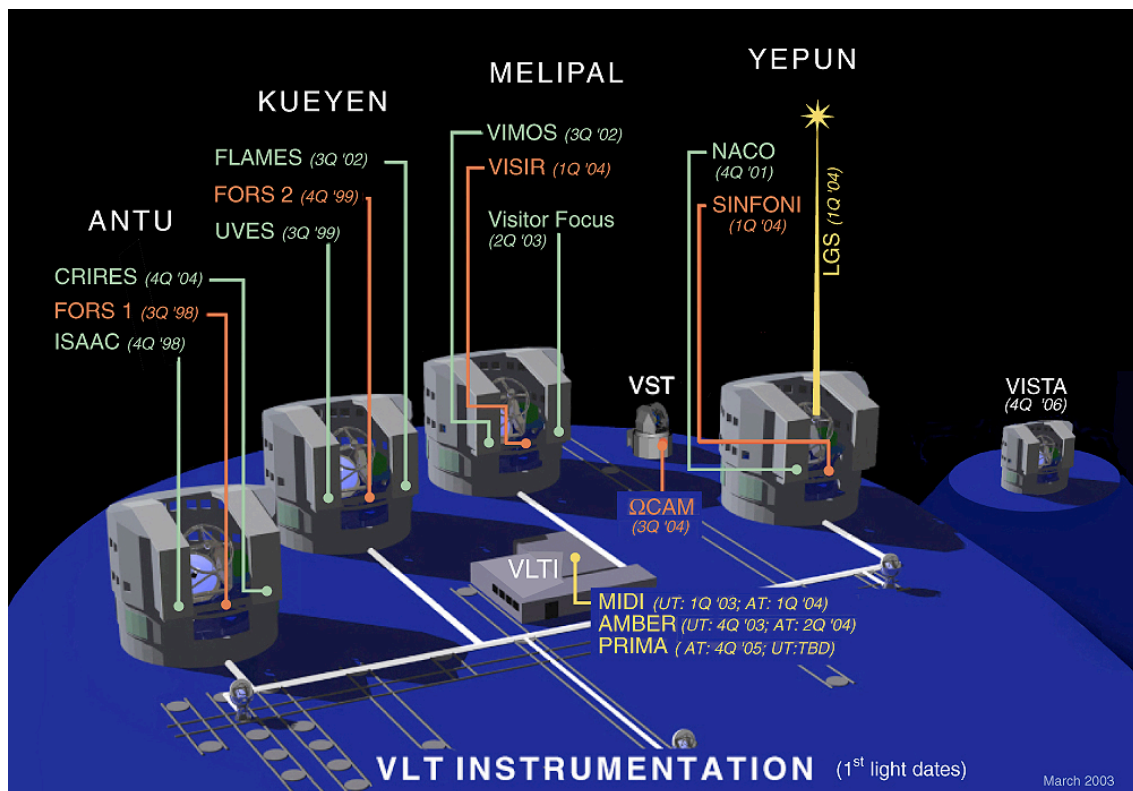
互いに掛け合わせることで実数になる関係の複素数のことである。

3 1. 干渉計の仕組み

一般に波を干渉させる装置全般を干渉計と言うが、ここでは天体観測装置に限定して干渉計を取り上げることにする。干渉計は複数の（光学，電波）望遠鏡を連動させて、測量をしたり非常に細かな天体の画像を合成する装置である。干渉計で行われる処理は2つある。

- 1) 2台の望遠鏡で得られた特定の周波数（波長）の光または電波の受信信号どうしを干渉させて最も強め合う条件を導く。
- 2) 最も強め合う条件で生じた干渉の波形の強弱の度合い（=コントラスト）を測る。

ここで強調しておくのは多くの望遠鏡を連動させた干渉計といっても、一度に干渉させるのは1対（つまり2台）の望遠鏡で得られた光または電波の受信信号である（電波の加算型干渉計だと一度に干渉させられるとか色々あるが、とりあえず、そういうものだとしておく）。



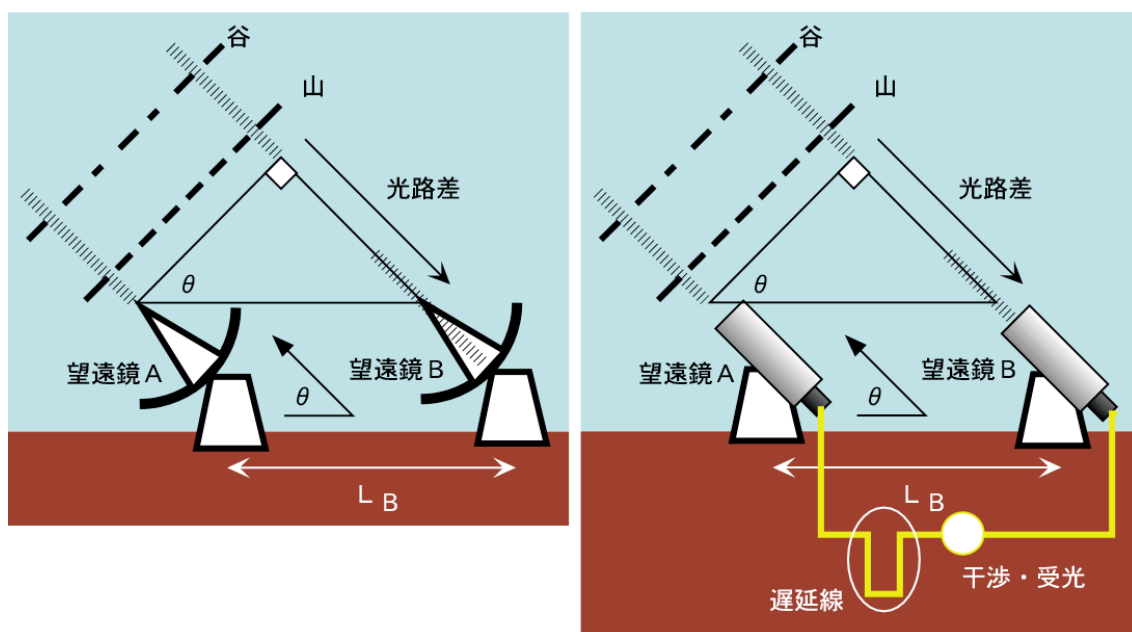
3 1-1. 干渉させるには

天体からやってくる電磁波を2台の望遠鏡でそれぞれ受けた時、波を干渉させる条件について説明する。電磁波が無限に続く波だったとしたら山も谷も周

期的に延々と繰り返す。2つの望遠鏡で受けた電磁波を干渉させる場合、強め合う条件は周期的に現れて延々と繰り返すことになる。しかし電磁波は波でもあり粒子でもある「光子」を単位としている。干渉して強め合うことができるのは天体を同時に出発した干渉する素質のある光子同士（可干渉光子）だけである。この素質ある光子どうしを重ねないと干渉は起こらない。そこで問題になるのが、

「天体を同時に出発した光子は、2つの望遠鏡に同時に到着しない」という事実である。

天体の位置が2台の望遠鏡が並んでいる垂直平面上にあり高度 θ であるとする。望遠鏡の向いている方向（この場合は高度 θ ）と望遠鏡間の距離（LB：ベースラインと言う）によって、望遠鏡A、Bには光路差（ $=LB \cdot \sin \theta$ ）が生じる。可干渉光子を受信する時間は光路差分のズレを生じるので、つじつま合わせて干渉させる必要がある。



先に説明したように電波望遠鏡では光の複素振幅を波として記録できる。2つの望遠鏡で観測時間を決めてデータを記録しておけば個別に記録した観測データを持ち寄って計算機上で干渉させることが可能である。光路差による時間の調整もデータ処理上の問題となる。

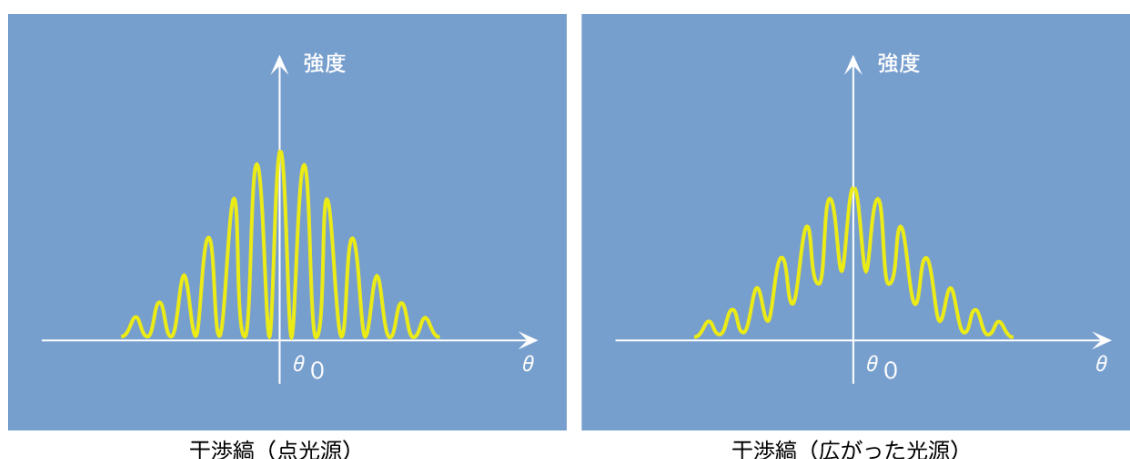
光の干渉計では、それぞれの望遠鏡で受光してしまったデータは、もはや波の性質を持ち合わせていない（エネルギー＝光子が何個来たかデータ）。光の干渉計では、望遠鏡を通した光をリアルに干渉させて、その状態を受光素子で

記録しなければならない。そのため光の干渉計では、それぞれの望遠鏡で集めた光を鏡によって引き回し、干渉させる場所まで導く光路が必要になる。しかも 2 台の望遠鏡の場所の違いによって生じる光路差分を調整する迂回路（遅延線：ディレイライン）が不可欠となる。光路差は 2 台の望遠鏡の位置関係と観測天体の位置によって決まり、それは時々刻々と変化することから、それに合わせて遅延線を制御する必要がある。何十～何百 m という距離の変化を光の波長の何十分の 1 [$\sim 0.0000001 \text{ cm}$] という精度が要求される。

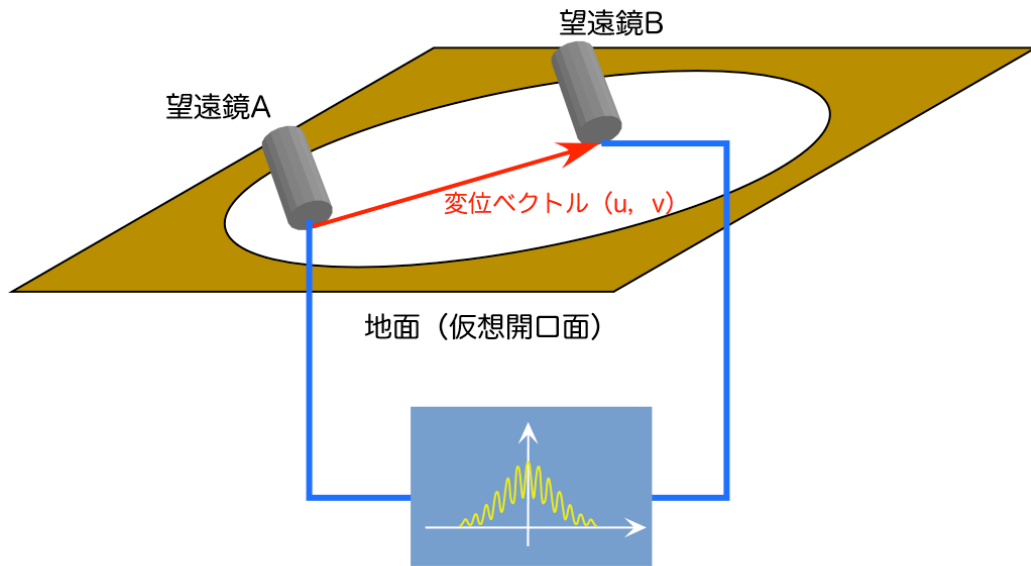
3 1-2. 干渉計による画像合成の原理

干渉計というと「望遠鏡を O km （可視光では $100\text{m}\sim 1\text{km}$ 程度）離して直径 O km の望遠鏡として機能させる」と説明される。これは離れた望遠鏡で集めた光を干渉させると、離れた距離相当の口径を持つ望遠鏡と同じ解像度の画像を合成できるということである。この技術を“開口合成”と言う。

干渉計を使って点光源（望遠鏡を離れた距離で決まる分解能よりも小さな広がりしか持たない光源）を観測すると得られる画像は干渉縞になる。この縞模様全体の広がりが望遠鏡単体の口径で決まる点像の大きさに相当し、縞一本分の広がりは望遠鏡間の距離と向いている方向で決まる分解能に相当する。同じ条件で（望遠鏡を離れた距離で決まる分解能よりも）広がった光源を観測すると干渉縞の明暗（コントラスト）が弱くなる。



実は、このコントラストが望遠鏡を配置した平面（開口面）上の 2 点（の距離）に対応した複素振幅の自己相関の値である。これより 2 次元関数である自己相関の 1 点が埋まることになる。



干渉縞→仮想開口面での自己相関関数： $ACF[Ep(u,v)]$

仮想開口面上で2台の望遠鏡の変位ベクトルを変え、干渉縞を測ることで、面上における複素振幅の自己相関値を埋めていく。これが開口合成である。理想的には2次元の面をくまなく埋めてしまえば、逆フーリエ変換によって、仮想開口面の直径に相当する望遠鏡による画像が再現できるはずである。しかし、2台の望遠鏡の組み合わせ方1つに対して自己相関関数の値が1点。地球の自転を利用して、変位ベクトルを連続的に変えたとしても、1次元曲線上の値が埋められるだけである。開口合成による像再生には、対象天体に対するある程度の仮定（モデル）や、測定されていない開口面上のデータ補完が必須である。

開口合成は天体観測において1ミリ秒角もの分解能を達成する有効な手段ではある。しかし画像の高精細さといった「絶対的画像情報量」を上げているわけではない。開口合成による天体画像を見る時には「実測された画像情報は悲しいほどわずかしかない」ということを念頭に置いて解釈することを忘れてはいけない。

赤外線干渉計 (IOTA/Mt. Hopkins in Arizona) によるベテルギウスの表面

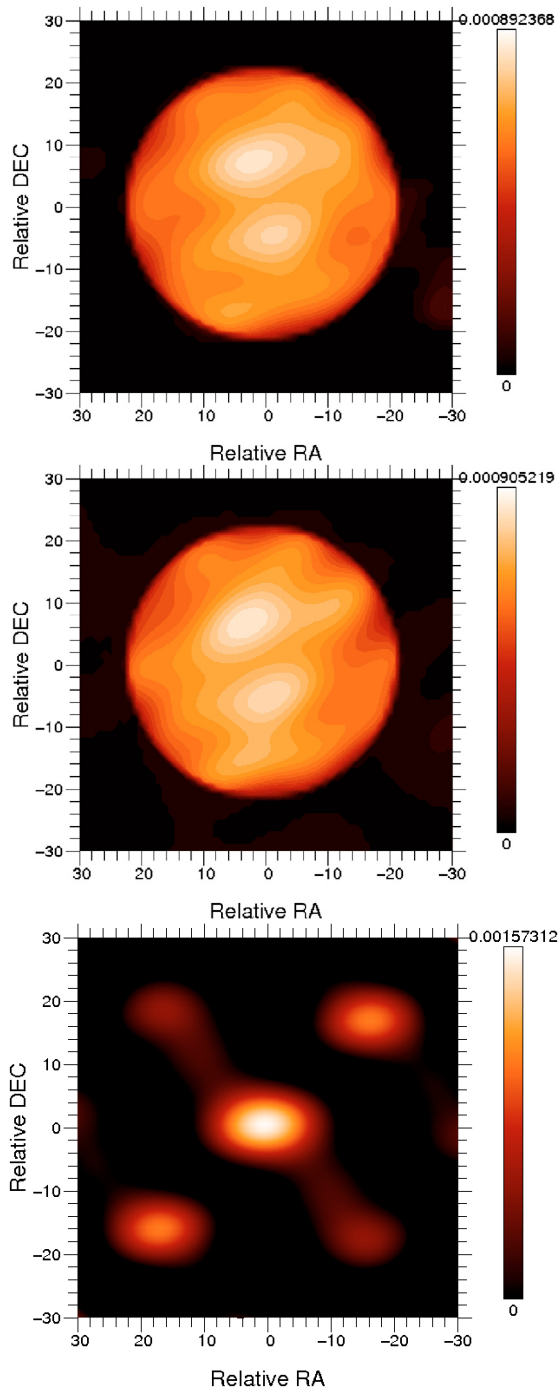


Fig. 8. *Upper window:* contour image reconstruction from MIRA. *Middle window:* contour image reconstruction from WISARD of Betelgeuse in a 60 mas field. Both images were reconstructed with the same a priori object and the same type of regularization. *Lower window:* image of the dirty beam, i.e., the interferometer's response to a point source, given our uv plane coverage.

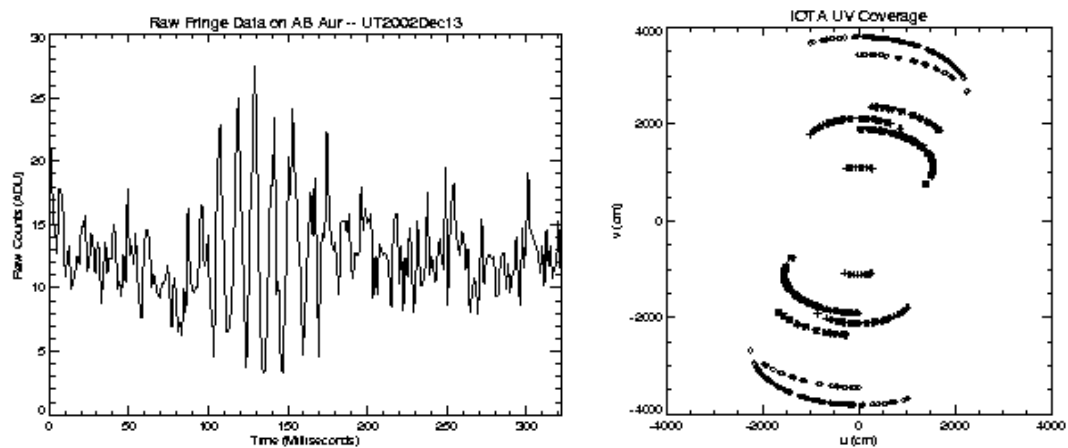
ベテルギウスはオリオン座にある1等星。太陽の1000倍もの直径を持ち、地球から600光年と比較的近い場所にある。このためベテルギウスは太陽以外で地球から表面が観測できる貴重な恒星である。

太陽の1000倍という直径は、この星が進化の最終段階に行き着いていることを表しており、いつ超新星爆発を起こしてもおかしくない状況である。

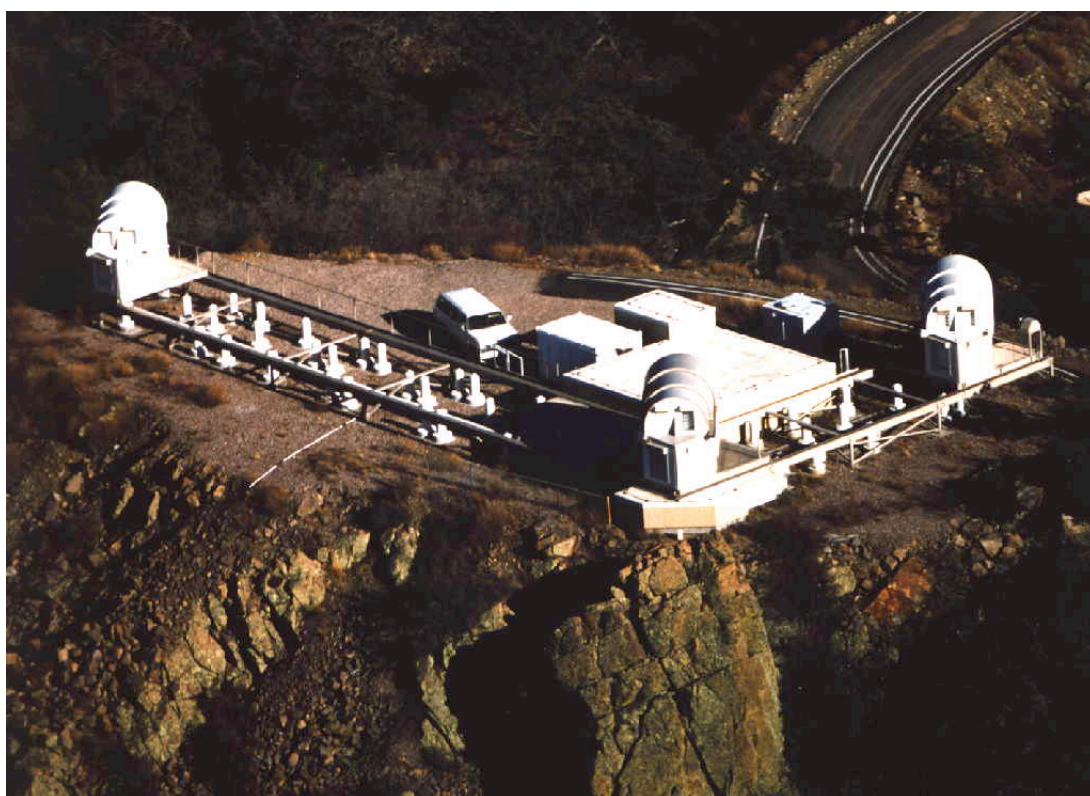
左の図は IOTA で得られたデータから再生されたベテルギウス表面の開口合成画像である。上段・中段とも同じデータから得られた画像であるが、信頼性を確認するため異なる画像処理方法を使って画像を再生している (MIRA と WISARD)。下段の画像は限られた開口面のカバー率 (U-V カバレッジ) で得られる点光源の画像。実際には、このように汚い画像が出てくるが、画像処理によって、もっともらしく化粧直しされている。

図は元論文「Astronomy & Astrophysics 508, 923-932 (2009), “Imaging the spotty surface of Betelgeuse in the H band”」より引用。

IOTA で実際に観測される干渉縞の例 (左) と U-V カバレッジ (右)



図は「http://tdc-www.harvard.edu/IOTA/NEWS/dec02_news/dec02_news.html」より引用



IOTA 全景 「<http://tdc-www.harvard.edu/IOTA/>」より引用